Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD

06.12.2023

# 8. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

**Aufgabe 1** Sei $\alpha$ die reelle Nullstelle von $X^3 - 2$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und $L$ die galoissche Hülle von $K/\mathbb{Q}$. Faktorisieren Sie $p = 2, 3$ und 5 in $L/\mathbb{Q}$, bestimmen Sie sämtliche Verzweigungs- und Trägheitsindizes, sowie die Zerlegungs- und Verzweigungsgruppen.

**Aufgabe 2** Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ und $p$ eine Primzahl mit $p \nmid n$. Sei $\sigma_p \in G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ definiert durch $\zeta_n \mapsto \zeta_n^p$. Zeigen Sie: $G_p = \langle \sigma_p \rangle$. Hierbei bezeichnet $G_p$ die Zerlegungsgruppe zu $p$ (überlegen Sie sich zuerst, daß diese Bezeichnung überhaupt Sinn ergibt).

**Aufgabe 3**
Es sei $L/K$ eine Galoiserweiterung von Zahlkörpern mit Gruppe $G$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ und $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ in $L/K$.
a) Für $\sigma \in G$ gelte

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}), \quad \forall \alpha \in \mathcal{O}_L.$$

Zeige: $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$. Insbesondere ist also dann $\sigma \in I_{\mathfrak{P}}$.
b) Seien $\sigma, \tau \in G$. Zeige:

$$\sigma(\alpha) \equiv \tau(\alpha) (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}), \forall \alpha \in \mathcal{O}_L \iff \sigma \equiv \tau (\mathrm{mod}\ I_{\mathfrak{P}}).$$

**Aufgabe 4**
a) Sei $L/K$ eine Erweiterung von Zahlkörpern und $F/K$ die Galoissche Hülle von $L/K$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $K$. Zeige: $\mathfrak{p}$ ist genau dann in $L/K$ voll zerlegt, wenn es in $F/K$ voll zerlegt ist.
(Hinweis: Sei $G := \mathrm{Gal}(F/K)$ und $H := \mathrm{Gal}(F/L)$. Sei $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ ein Primideal von $F$ und $D := G_{\mathfrak{P}}$ die Zerlegungsgruppe. Zeige zunächst, dass

$$H\backslash G/D \longrightarrow \text{ Primideale über } \mathfrak{p} \text{ in } L/K, \quad HgD \mapsto g(\mathfrak{P}) \cap L,$$

eine wohldefinierte Bijektion ist.)

b) Seien $L$ und $L'$ zwei endliche Erweiterungen des Zahlkörpers $K$. Falls $\mathfrak{p}$ in $L/K$ und $L'/K$ jeweils voll zerlegt ist, so auch im Kompositum $LL'/K$.

Besprechung der Aufgaben am 12.12.2023 in der Übung