Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 15.11.2023

5. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Für ein Polynom $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ sei $\mathfrak{a}_f$ das gebrochene Ideal, das von den Koeffizienten von f erzeugt wird. Für ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathcal{O}$ definieren wir

$$v_{\mathfrak{p}}(f) := v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}_f).$$

Zeige:
(a) Für $f_1, f_2 \in K[x] \setminus \{0\}$ gilt $\mathfrak{a}_{f_1 f_2} \subseteq \mathfrak{a}_{f_1}\mathfrak{a}_{f_2}$ und $v_{\mathfrak{p}}(f_1 f_2) \geq v_{\mathfrak{p}}(f_1) + v_{\mathfrak{p}}(f_2)$.
(b) In (a) gilt tatsächlich Gleichheit.
(c) Für normierte Polynome $f, g, h \in K[x]$ mit $f(x) = g(x)h(x)$ und $f \in \mathcal{O}[x]$ gilt $g, h \in \mathcal{O}[x]$.

Teil (c) ist die Verallgemeinerung des Gaußschen Lemmas.

Aufgabe 2
a) Zeige, daß die quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante

$$5, 8, 13, -3, -4, -7, -8, -11$$

die Klassenzahl 1 haben. Verwenden Sie dazu die Minkowski-Konstante.
b) Berechne die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$.

Hinweis zu (b):

- $2\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_2^2$ wobei $\mathfrak{p}_2 = \langle 2, \sqrt{-26}\rangle_{\mathbb{Z}}$.
- $3\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_3\overline{\mathfrak{p}_3}$, wobei $\mathfrak{p}_3 = \langle 3, 1+\sqrt{-26}\rangle_{\mathbb{Z}}, \overline{\mathfrak{p}_3} = \langle 3, 1-\sqrt{-26}\rangle_{\mathbb{Z}}$.
- $5\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_5\overline{\mathfrak{p}_5}$, wobei $\mathfrak{p}_5 = \langle 5, 2+\sqrt{-26}\rangle_{\mathbb{Z}}, \overline{\mathfrak{p}_3} = \langle 5, 1-\sqrt{-26}\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal.
a) Zeige, daß es eine natürliche Zahl h gibt, so daß $\mathfrak{a}^h = a\mathcal{O}_K$ ein Hauptideal ist.
b) Zeige, daß $\mathfrak{a}$ im Körper $L = K(\sqrt[h]{a})$ ein Hauptideal wird, d.h. $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L = \alpha\mathcal{O}_L$ für ein geeignetes α.
c) Zeige, daß es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L gibt, in der jedes Ideal von K ein Hauptideal wird.

Aufgabe 4
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und R ein Teilring von $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

(a) $[\mathcal{O}_K : R] < \infty$.
(b) R enthält eine $\mathbb{Q}$-Basis von K.
(c) $\mathrm{Quot}(R) = K$.

Teilringe R, die diese äquivalenten Bedingungen erfüllen, nennt man *Ordnungen*.

Sei nun R eine solche Ordnung. Zeigen Sie:

(i) R ist Noethersch.
(ii) Jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist maximal.
(iii) R ist genau dann ganz abgschlossen in K, wenn $R = \mathcal{O}_K$ gilt.
(iv) Im Fall $R \neq \mathcal{O}_K$ hat R nicht invertierbare gebrochene Ideale.
(v) Sei nun K ein quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie, dass die Ordnungen in K von der Form $R = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$, $f \in \mathbb{N}$, sind.

Besprechung der Aufgaben am 21.11.2023 in der Übung