Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 08.11.2023

4. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1
Sei R ein Dedekindring mit nur endlich vielen Primidealen. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 2 Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gebrochene Ideale in $K := \mathrm{Quot}(\mathcal{O})$. Sei $S \subseteq \mathcal{O}$ eine multiplikative Menge. Zeige:
(a) $S^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cdot S^{-1}\mathfrak{b}$.
(b) $S^{-1}(\mathcal{O} \colon \mathfrak{a}) = \left(S^{-1}\mathcal{O} \colon S^{-1}\mathfrak{a}\right)$
(c) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $S_\mathfrak{p} := \mathcal{O} \setminus \mathfrak{p}$. Dann ist $S_\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{O}$ ein Hauptidealring.
(d) Für ein Hauptideal $\mathfrak{a} = \alpha\mathcal{O}$ gilt: $(\mathcal{O} \colon \mathfrak{a}) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{O}$.

Aufgabe 3
Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K, \mathfrak{a} \neq (0)$, definieren wir $N(\mathfrak{a}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$. Zeigen Sie:
a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $p\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Dann ist $N(\mathfrak{p})$ eine p-Potenz.
b) $N(\mathfrak{p}^n) = N(\mathfrak{p})^n$ für alle Primideal $\mathfrak{p}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
c) $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathcal{O}_K$. (Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, daß $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathcal{O}_K$ und wenden Sie den Chinesischen Restsatz an.)

Aufgabe 4 Seien K_1 und K_2 zwei Zahlkörper mit $n_1 := [K_1 : \mathbb{Q}]$ und $n_2 := [K_2 : \mathbb{Q}]$. Sei $K := K_1K_2$ und es gelte $[K : \mathbb{Q}] = n_1n_2$ sowie $(d_{K_1}, d_{K_2}) = 1$. Seien

$$\omega_1, \ldots, \omega_n \text{ und } \mu_1, \ldots, \mu_m$$

Ganzheitsbasen von K_1 bzw. K_2. Zeige:

(a) $\omega_i\mu_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, ist eine Ganzheitsbasis von $K := K_1K_2$.
(b) $d_K = d_{K_1}^m d_{K_2}^n$.

Hinweis: Sei $\alpha = \sum_{i,j} a_{ij}\omega_i\mu_j \in \mathcal{O}_K$ mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Zeige dann: $d_{K_i}a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$. Es folgt (a).

Besprechung der Aufgaben am 14.11.2023 in der Übung