

3. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1 Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Zeigen Sie

$$\mathcal{O}_K = \langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \gamma \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\gamma], \text{ wobei } \gamma := \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2},$$

und berechnen Sie die Diskriminante d_K von K .

Aufgabe 2 Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ und $\alpha = 33 + 11\sqrt{-7}$. Man schreibe das Hauptideal $\alpha\mathcal{O}_K$ als Produkt von Primidealen.

Aufgabe 3 Sei \mathcal{O} ein Dedekindring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \triangleleft \mathcal{O}$. Sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \prod \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}}, \quad \nu_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}_0, \text{ fast alle } \nu_{\mathfrak{p}} = 0, \\ \mathfrak{b} &= \prod \mathfrak{p}^{\mu_{\mathfrak{p}}}, \quad \mu_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}_0, \text{ fast alle } \mu_{\mathfrak{p}} = 0. \end{aligned}$$

Hierbei erstreckt sich das Produkt jeweils über alle Primideale $\neq (0)$ von \mathcal{O} . Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} i) \quad \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} &\iff \nu_{\mathfrak{p}} \leq \mu_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p}, \\ ii) \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} &= \prod \mathfrak{p}^{\min(\nu_{\mathfrak{p}}, \mu_{\mathfrak{p}})} \\ iii) \quad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} &= \prod \mathfrak{p}^{\max(\nu_{\mathfrak{p}}, \mu_{\mathfrak{p}})} \end{aligned}$$

(Hinweis: Beweisen Sie zunächst die folgende Charakterisierung:

$$v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^n\}.)$$

Aufgabe 4

Sei \mathcal{O} ein Dedekindring und $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^n$ eine Primidealpotenz. Zeigen Sie, daß jedes Ideal in $R = \mathcal{O}/\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist.

Hinweis: Zeigen Sie, daß die Ideale von R durch $\mathfrak{p}^{\nu}/\mathfrak{p}^n$, $\nu = 0, \dots, n$, gegeben sind. Wähle $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ und zeige $\mathfrak{p}^{\nu} = \pi^{\nu}\mathcal{O} + \mathfrak{p}^n$.

Besprechung der Aufgaben am 07.11.2023 in der Übung