Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 24.01.2024

13. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1
Sei K ein p-adischer Zahlkörper mit normierter Bewertung v und $a \in K^\times$. Sei α eine Nullstelle von $x^m - a$ und es gelte $(v(a), m) = 1$. Zeige: $K(\alpha)/K$ ist voll verzweigt vom Grad m.

Aufgabe 2
Für einen p-adischen Zahlkörper sei K^{nr} das Kompositum aller endlichen unverzweigten Erweiterungen von K (in einem festen algebraischen Abschluss von K). Dann nennt man K^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von K.
a) Zeige: Die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ entsteht durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von zu p teilerfremder Ordnung.
b) Zeige: $K^{nr} = K\mathbb{Q}_p^{nr}$.

Aufgabe 3
Sei L/K eine Galoiserweiterung von p-adischen Zahlkörpern mit Gruppe G. Für $s \geq -1$ sei

$$G_s = G_s(L/K) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}} \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{O}_L\}.$$

Zeige:
a) G_{s+1} ist ein Normalteiler in G.
b) $G_s = 1$ für $s >> 0$.

Aufgabe 4
Sei $\zeta = \zeta_{p^m}$ eine primitive p^m-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p^c$. Zeige:
(a) $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ ist voll verzweigt vom Grad $\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$.
(b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$.
(c) $\mathbb{Z}_p[\zeta]$ ist der Bewertungsring von $\mathbb{Q}_p(\zeta)$.
(d) $1 - \zeta$ ist ein Primelement mit Norm p.

Besprechung der Aufgaben am 30.01.2024 in der Übung