Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 17.01.2024

12. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1
Sei $\epsilon \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ und $\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p^\nu \in \mathbb{Z}_p$ und sei $s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu p^\nu$ die Folge der Partialsummen.

(a) Zeigen Sie, dass für $b \in \{0, \dots, p-1\}$, $i \in \{1, \dots, bp^n - 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$v_p\left(\binom{b \cdot p^n}{i}\right) = n - v_p(i).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge ϵ^{s_n} gegen eine Zahl ϵ^α in $1 + p\mathbb{Z}_p$ konvergiert.
Hinweis: Reduzieren Sie das Problem darauf zu zeigen, dass $\{\epsilon^{s_n}\}_n$ eine Cauchyfolge ist und schreiben Sie ϵ dann in der Form $\epsilon = 1+p\beta \in 1+p\mathbb{Z}_p$.

(c) Zeigen Sie weiter, dass dadurch $1 + p\mathbb{Z}_p$ zu einem $\mathbb{Z}_p$-Modul wird.

Aufgabe 2

Sei K ein p-adischer Zahlkörper und $V \leq K^\times$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige: V ist offen und abgeschlossen in K.

Aufgabe 3
Sei K ein p-adischer Zahlkörper. Zeigen Sie die Stetigkeit des p-adischen Logarithmus

$$\log\colon K^\times \longrightarrow K.$$

Aufgabe 4
Sei K ein p-adischer Zahlkörper mit Verzweigungsindex $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$, $x \in \mathfrak{p}_K^n$ mit $n > e/(p-1)$ und $z \in \mathbb{Z}_p$. Zeige:

$$(1+x)^z = \exp(z \log(1+x)),$$
$$\log((1+x)^z) = z \log(1+x).$$

Besprechung der Aufgaben am 23.01.2024 in der Übung