Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 10.01.2024

11. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 = 2$. Sei $\mathfrak{p}$ *das* Primideal über der 3. Bestimmen Sie ein Primelement π für $\mathfrak{p}$, sowie ein Vertretersystem R von $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, und berechnen Sie die ersten 4 Ziffern der $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $1/3$.

Aufgabe 2
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$ über der Primzahl p mit Restklassengrad f. Sei $K_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von K bezüglich der $\mathfrak{p}$-adischen Bewertung. Sei $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ der Bewertungsring in $K_\mathfrak{p}$. Zeigen Sie: $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ enthält die $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzeln.

Aufgabe 3
Sei p eine Primzahl. Sei $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ p \end{pmatrix}$ der verallgemeinerte Binomialkoeffizient, d.h.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ p \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\cdots(\sqrt{2}-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p[\sqrt{2}] \iff p \equiv \pm 1 (\text{mod } 8)$$

Aufgabe 4 (Korrektur)
Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $\mathcal{O}_K$. Zusätzlich zur ursprünglichen Aufgabenstellung setzen wir voraus, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Sei also $\pi\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}$. Sei $K_\mathfrak{p}$ die Vervollständigung von K bezüglich dem $\mathfrak{p}$-adischen Betrag und $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ der Bewertungsring. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon \mathcal{O}_K[[X]] \longrightarrow \mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}, \quad f(X) \mapsto f(\pi),$$

einen Isomorphismus $\mathcal{O}_K[[X]]/(X-\pi) \simeq \mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ induziert.

Besprechung der Aufgaben am 16.01.2024 in der Übung