Prof. W. Bley
Andrei Lavrenov, PhD 20.12.2023

10. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots$ ist für keine Primzahl p in $\mathbb{Q}_p$ konvergent.

Aufgabe 2

Sei p eine Primzahl und $d = d_p$ die vom p-adischen Betrag $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}_p$ definierte Metrik, d.h.

$$d(x,y) := |x-y|_p$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Für $x \in \mathbb{Q}_p$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ seien

$$\begin{aligned} B(x,r) &:= \{y \in \mathbb{Q}_p \mid d(x,y) \le r\}, \\ B(x,r^-) &:= \{y \in \mathbb{Q}_p \mid d(x,y) < r\} \end{aligned}$$

die abgeschlossene bzw. offene Kugel um x mit Radius r.
Zeigen Sie:
(a) Sei $z \in B(x,r)$. Dann gilt: $B(x,r) = B(z,r)$. In Worten: Jeder Punkt einer Kugel ist auch "sein Zentrum".
(b) Zwei Kugeln in $\mathbb{Q}_p$ sind entweder disjunkt oder die eine ist enthalten in der anderen.
(c) Die Kugeln in $\mathbb{Q}_p$ sind gleichzeitig offen und abgeschlossen.
(d) $\mathbb{Q}_p$ ist total unzusammenhängend, d.h. für die Zusammenhangskomponente C_x von x gilt stets $C_x = \{x\}$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen und $R = \mathbf{F}_p[T]$. Sei $K = \mathbf{F}_p(T)$ der Quotientenkörper.
a) Definiere zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von R, $\mathfrak{p} \neq (0)$, eine $\mathfrak{p}$-adische Bewertung. Beschreibe den Zusammenhang zur Null- bzw. Polstellenordung bei $T = \alpha$, falls $\mathfrak{p} = (T - \alpha)$.
b) Zeige: Durch $v_\infty(\frac{f(T)}{g(T)}) = \deg(g(T)) - \deg(f(T))$ wird ebenfalls eine Bewertung auf K definiert. Interpretiere dies als Null- bzw. Polstellenordnung in einem unendlich fernen Punkt ∞.
c) Sei $\mathfrak{p} = (p(T))$ mit irreduziblem $p(T)$. Sei $F_\mathfrak{p}$ die durch $p(T)$ definierte Körpererweiterung und $f_\mathfrak{p} = [F_\mathfrak{p} : \mathbf{F}_p]$. Definiere

$$|h(T)|_\mathfrak{p} := p^{-f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(h(T))} \text{ für } h(T) \in K.$$

Definiere ebenfalls

$$|h(T)|_\infty := p^{v_\infty(h(T))}.$$

Zeige die Geschlossenheitsrelation.

Aufgabe 5
a) Berechnen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$.
b) Bestimmen Sie die Gesamtheit der Lösungen von

$$x^2 - 10y^2 = p, x, y \in \mathbb{Z}$$

für $p = 31$ und $p = 37$.

Besprechung der Aufgaben am 09.01.2024 in der Übung