

1. Übungsblatt zur Algebraischen Zahlentheorie

Aufgabe 1 Sei $d \in \mathbb{Z}, d < 0$, quadratfrei. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und \mathcal{O}_K der Ring der ganzen Zahlen in K . Man zeige:

$$|\mathcal{O}_K^\times| = \begin{cases} 2, & \text{falls } d \neq -1, -3, \\ 4, & \text{falls } d = -1, \\ 6, & \text{falls } d = -3. \end{cases}$$

Aufgabe 2 a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Dirichletschen Einheitensatzes den Einheitenrang für die folgenden Zahlkörper:

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\sqrt{d}), \quad d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \text{ quadratfrei,} \\ &\mathbb{Q}(\zeta_p), \quad \zeta_p = \exp(2\pi i/p), \quad p \text{ eine Primzahl,} \\ &L = \text{Zerfällungskörper von } x^3 - 2. \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die sämtlichen Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 3 Ist $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$ eine ganze algebraische Zahl?

Aufgabe 4 Sei A ein nullteilerfreier kommutativer Ring und $K = \text{Quot}(A)$. Sei A ganz abgeschlossen in K . Zeigen Sie, daß dann auch der Polynomring $A[t]$ in der Variablen t ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Besprechung der Aufgaben am ??.10.2023 in der Übung