Lemma: Sei $\| \ \|$ ein Betrag auf K und es gelte die verschärfte Δ-Ungleichung. Sei $\hat{K}$ die Komplettierung bez. $\| \ \|$. Sei $\alpha \neq 0$ ein Element in $\hat{K}$ repräsentiert durch die CF $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha_n \in K$. Dann wird $(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ wird stationär.

Beweis: $(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, denn:

$$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ , \quad \forall x,y \in K$$

Also: $$\big|\, \|\alpha_n\| - \|\alpha_m\| \,\big| \leq \|\alpha_n - \alpha_m\| \xrightarrow{n \geq m \geq N} 0$$

Sei $\alpha \neq 0 \Rightarrow (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0,\ M \in \mathbb{N}\ \forall\, m \geq M : \ \|\alpha_m\| \geq \varepsilon$$

Angenommen $(\|\alpha_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ wird nicht stationär

$$\Rightarrow \forall m \geq 0\ \exists\, n > m : \ \|\alpha_n\| \neq \|\alpha_m\|$$

$$\Rightarrow \|\alpha_n - \alpha_m\| \overset{!}{=} \max(\|\alpha_n\|, \|\alpha_m\|) \geq \varepsilon$$

$\lightning$ zur CF-Eigenschaft von $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Bemerkung: Für $K = \mathbb{Q}$ und $\| \ \| = | \ |_p$ gilt:

$$|\alpha|_p \in p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

$$|\alpha|_p = 0 \iff \alpha = 0$$

Sei $K|\mathbb{Q}$ ein Zahlkp. Für max. Ideale $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ haben wir die (endlichen) Beträge $|\ |_{\mathfrak{p}}$,

$$|\alpha|_{\mathfrak{p}} := N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha)}, \quad \alpha \in K \setminus \{0\}$$

$$|0|_{\mathfrak{p}} := 0$$

Für $\tau : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ hat einen (unendlichen) Betrag $|\ |_\tau$,

$$|\alpha|_\tau := |\tau(\alpha)|$$

Wir haben also endlichen Beträge und $r+s$ undendliche Beträge.

<u>Sprechweise:</u> Man spricht von den <u>Stellen</u> von K.

<u>Geschlossenheitsrelation:</u> Sei $\alpha \in K^\times$. Dann gilt:

$$\prod_{\mathfrak{p}} |\alpha|_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\tau : K \hookrightarrow \mathbb{C}} |\alpha|_\tau = 1 .$$

<u>Beweis:</u>

$$\text{l.S.} = \prod_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha)} \cdot \prod_{\tau} |\tau(\alpha)|$$

$$= N\left(\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\alpha)}\right)^{-1} \cdot \left|N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)\right|$$

$$= N(\alpha \mathcal{O}_K)^{-1} \; |N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)|$$

$$= |N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)|^{-1} \; |N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)| \; = 1.$$

■

<u>Definition:</u> $|\;|$ heißt <u>nicht-archimedisch</u> (oder <u>endlich</u>), falls $|n|$ für $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

<u>Satz:</u> $|\;|$ ist endlich $\iff |x+y| \leq \max(|x|, |y|)$, $\forall x, y \in K$.

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$" $|n| = |1 + \ldots + 1| \leq |1| = 1$.

„$\Rightarrow$" Sei $|n| \leq N$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $x, y \in K$ mit $|x| \geq |y|$.

Z.z. $|x+y| \leq |x|$

Es gilt: $|x|^{\nu} |y|^{n-\nu} \leq |x|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |x+y|^n \leq \sum_{\nu=0}^{n} \left|\binom{n}{\nu}\right| |x|^{\nu} |y|^{n-\nu}$$

$$\leq N(n+1)|x|^n$$

$$\Longrightarrow |x+y| \leq N^{1/n} (n+1)^{1/n} |x| \xrightarrow{n\to\infty} |x|$$

<u>Satz</u>: Jede Bewertung von $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $|\ |_p$ oder $|\ |_\infty = |\ |_\mathbb{R} = |\ |$.

<u>Beweis für den endlichen Fall:</u>

Sei $\|\ \|$ eine endliche Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Dann gilt: $\|z\| \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{Z}$.

Sei p eine Pz. mit $\|p\| < 1$ (sonst wäre $\|\alpha\| = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$).

Betrachte $\mathfrak{a} := \{ a \in \mathbb{Z} \mid \|a\| < 1 \} \underset{\neq}{\trianglelefteq} \mathbb{Z}$

wegen der verschärften Δ-Ungleichung

Es gilt: $p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{a} \underset{\neq}{\trianglelefteq} \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \quad p\mathbb{Z} = \mathfrak{a}$

Sei $a \in \mathbb{Z}$, $a = p^m b$, $p \nmid b \Longrightarrow b \notin \mathfrak{a}$

$\Longrightarrow \|b\| = 1$

$\Longrightarrow \|a\| = \|p\|^m = |a|_p^s$ für $\underline{s = -\dfrac{\log \|p\|}{\log(p)}}$

$$|a|_p^s = p^{-v_p(a)s} = p^{-ms}$$

Zum unendlichen Fall: Neukirch, Satz (3.7).

Zu einem endlichen Betrag $|\,|$ von K definiert man eine Bewertung durch

$$v(x) := -\log|x|, \quad x \neq 0, \qquad v(0) := \infty$$

Es gilt dann:

$$v(x) = \infty \iff x = 0$$
$$v(xy) = v(x) + v(y), \quad \forall x,y \in K$$
$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)), \forall x,y \in K.$$

Zwei Bewertungen v_1, v_2 heißen äquivalent, falls $v_1 = s v_2$ mit $s \in \mathbb{R}_{>0}$.

Satz: Sei $|\,|$ ein endlicher Betrag auf K. Dann ist

$$\mathcal{O} = \{x \in K \mid |x| \leq 1\} = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

ein Integritätsbereich mit

$$\mathcal{O}^\times = \{x \in K \mid |x| = 1\} = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$$

und einzigem maximalen Ideal

$$\mathfrak{p} = \{x \in K \mid |x| < 1\} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}.$$

Beweis: $\mathcal{O}$ ist ein lokaler Ring, d.h.

$$\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times \lhd \mathcal{O}.$$

$\blacksquare$

Bemerkungen:

1) Äquivalente Bewertungen (Beträge) führen zu denselben Bewertungsringen $\mathcal{O}$.

2) Für $x \in K$ gilt: $x \in \mathcal{O}$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}$ (vgl. mit der Definition eines Bewertungsringes z.B. in A-MD)

Def.: Eine Bewertung v ist diskret, falls sie einen kleinsten positiven Wert s hat. Eine diskrete Bewertung heißt normiert, falls $s = 1$ ist. Jedes $\pi \in \mathcal{O}$ mit $v(\pi) = 1$ nennt man Primelement oder Uniformisierende, falls v diskret und normiert ist.

Lemma: Falls v diskret ist, so gilt

$$v(K^\times) = s\mathbb{Z}.$$

Beweis: $v(\pi) = s \Rightarrow v(\pi^n) = ns, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Sei $\alpha \in K^\times$ und $v(\alpha) = st$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Z.z. $t \in \mathbb{Z}$

Dazu:
$$v(\pi^n \alpha) = n\, v(\pi) + v(\alpha) = s\,(t+n)$$

Falls $t \notin \mathbb{Z}$, so gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 < t+n < 1. \quad \lightning \qquad \blacksquare$$

Lemma: Sei v eine diskrete, normierte Bewertung auf K und π ein Primelement, d.h. $v(\pi) = 1$. Dann besitzt jedes $x \in K^\times$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \pi^m u, \quad m \in \mathbb{Z}, \; u \in \mathcal{O}^\times.$$

Beweis: $v(x) = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi^m \underbrace{(\pi^{-m} x)}_{\in \mathcal{O}^\times}$ $\blacksquare$

Beispiele:

1) $K = \mathbb{Q}$, $|\;| = |\;|_p$, p Pz., $v = v_p$, $\pi = p$.

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; (a,b) = 1,\ p \nmid b \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$
$$= S^{-1}\mathbb{Z} \text{ mit } S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}.$$

$$\mathcal{O}^\times = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; (a,b) = 1,\ p \nmid ab \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathcal{O} \;\middle|\; (a,b) = 1,\ p \nmid b,\ p \mid a \right\}$$

2) K Zahlkp., $\mathfrak{p} \triangleleft \mathcal{O}_K$ max., $|\ | = |\ |_\mathfrak{p}$

$v = v_\mathfrak{p}$

Wähle $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$. Dann gilt: $v_\mathfrak{p}(\pi) = 1$.

$$\mathcal{O} = \text{Lokalisierung von } \mathcal{O}_K \text{ nach } S = \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{p}$$

$$= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathcal{O}_K,\ b \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{p} \right\}.$$

$$\mathcal{O}^\times = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

$$\text{maximales Ideal von } \mathcal{O} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; \begin{array}{l} b \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{p} \\ a \in \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

<u>Satz:</u> Sei v eine diskrete Bewertung auf K. Dann ist

$$\mathcal{O} = \{ x \in K \mid v(x) \geq 0 \}$$

ein Hauptidealring. Falls v normiert ist, so sind die von Null verschiedenen Ideale gegeben durch

$$\mathfrak{p}^n = \pi^n \mathcal{O} = \{ x \in K \mid v(x) \geq n \}, \ \forall n \geq 0.$$

Es gilt: $\mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{p}$

Beweis: Wie bei $\mathbb{Z}_p$. $\blacksquare$

ZIEL: K Zkp., $\mathfrak{p} \lhd \mathcal{O}_K$ max. Ideal

$| \ |_{\mathfrak{p}}$, $v_{\mathfrak{p}}$ normierte diskrete Bewertung auf K.

$$\xrightarrow{\text{Komplettierung}} \quad K_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \supseteq \hat{\mathfrak{p}}$$

$$\mathbb{Q}_p \supseteq \mathbb{Z}_p \supseteq p\mathbb{Z}_p$$

Sei R ein VS von $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\hat{\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$.

Dann hat jedes $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \pi^\nu \quad \text{mit } a_\nu \in R.$$

Hierbei ist π ein fixiertes Primelement.