

3. Vortrag zum Seminar "p-adische Liegruppen"

Sei A eine assoziative Algebra. Dann ist

durch

$$[x, y]_A := xy - yx$$

eine Lie-Klammer auf A definiert.

Beispiel: $\mathfrak{gl}_n(K)$ ist auf diese Weise von $A = M_n(K)$ abgeleitet.

Frage: Ist jede Lie-Algebra eine Lie-Subalgebra einer Lie-Algebra, die von einer assoziativen Algebra abgeleitet ist?

Dann beantworten wir zunächst die Tensor-Algebra $T(E)$, wobei E ein beliebiges K -VR ist.

$$T(E) := \bigoplus_{n \geq 0} E^{\otimes n}, \text{ wobei } E^{\otimes 0} = K \text{ und}$$

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_m) := v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m.$$

Hiermit wird $T(E)$ zu einer assoziativen Algebra.

Sei nun $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra. Sei

$$f(\mathfrak{g}) := \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle \triangleleft T(\mathfrak{g})$$

Erzeugnis als

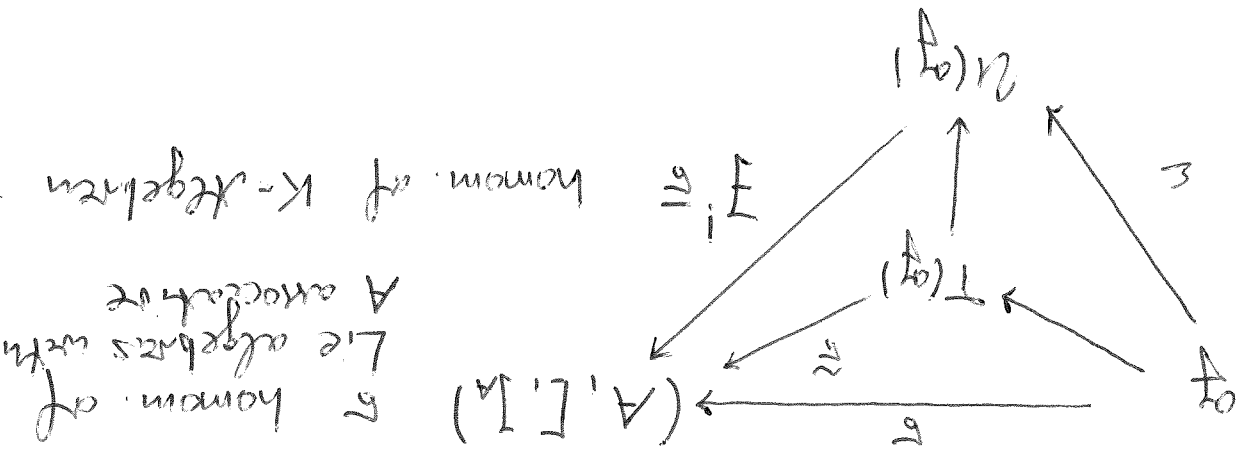
$\mathfrak{g}$ -wertiges Ideal für alle $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definition:

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}) / f(\mathfrak{g})$$

als Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\varepsilon: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g}), x \mapsto x + f(\mathfrak{g})$

$u(q)$ hat die folgende universelle Eigenschaft:



τ homom. of Lie algebras with A associative
 $\tilde{\tau} =$ homom. of K -Algebren

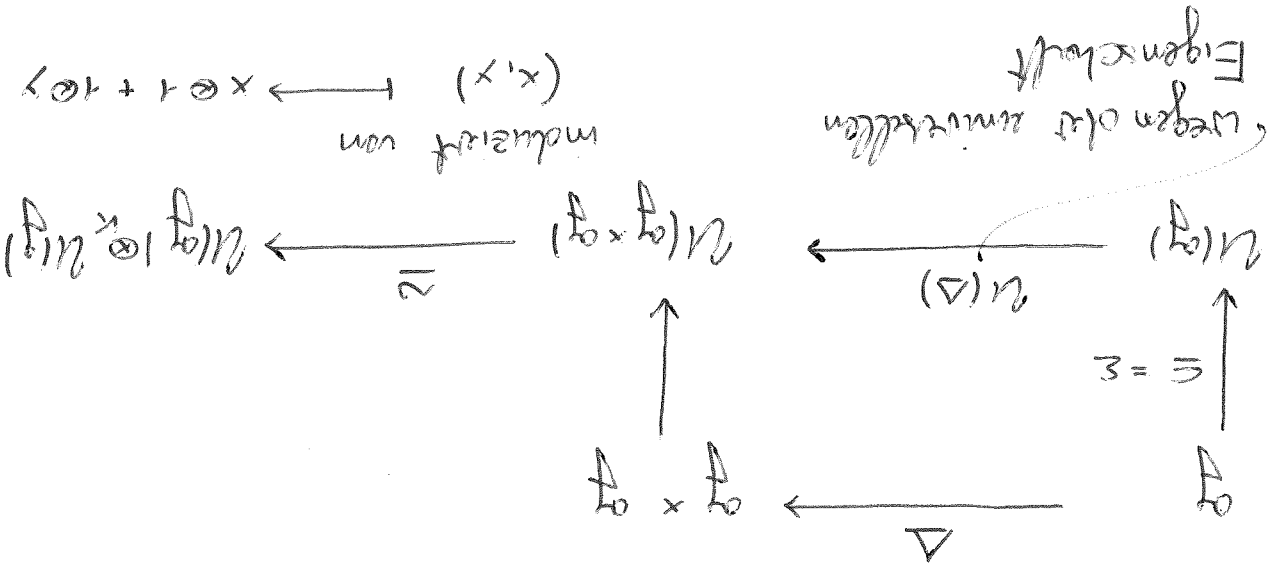
Bew: ① Die universelle Eigenschaft von $T(q)$ liefert $\tilde{\tau}$, man zeigt leicht $\tilde{\tau}(q) \in \text{Ku}(\tilde{\tau})$. ■

Man kann zeigen: $\varepsilon : q \rightarrow (u(q), [\cdot, \cdot]_{u(q)})$

Betrachte den Homomorphismus von Lie-Algebren

$$\Delta : q \rightarrow q \times q, x \mapsto (x, x)$$

Man erhält:



Das Kompositionikum nimmt mit wieder Δ , also

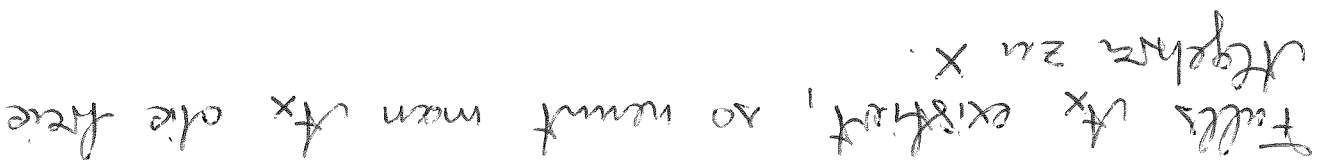
$$\Delta : u(q) \rightarrow u(q) \otimes u(q)$$

$$\mathcal{A} = \{ a \in \mathcal{A}(g) : \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \}$$

Sei A eine Kategorie von K -Objekten. Wir betrachten die folgenden Beispiele

Wir betrachten die folgende Fragestellung:

Gegeben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Gibt es eine Menge A und $X \rightarrow A$, so dass die folgende Aussage Eigenschaft erfüllt ist:



Wir erhalten nun

$$\mathcal{A}_X := \mathcal{A}_S := T(K^d)$$

mit

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_S, \quad \text{Mit ist}$$

$$K^d \subseteq T(K^d)$$

$$e_i \mapsto X_i$$

Ausdrück:

$$A_{S_X} = \text{Ring mit Koeffizienten Polynome}$$

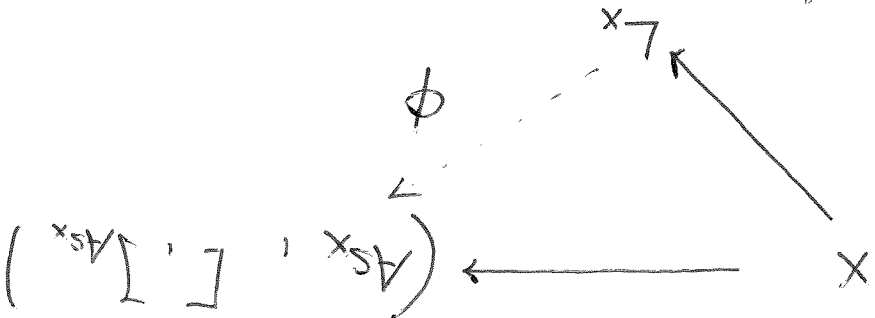
$$= \left\{ \sum_{i \in K} a_{(i_1, \dots, i_m)} X_{i_1} \dots X_{i_m} \right\}$$

Beachte: Skalare kommutieren mit Monomen, aber z.B. $X_1 X_2 \neq X_2 X_1$

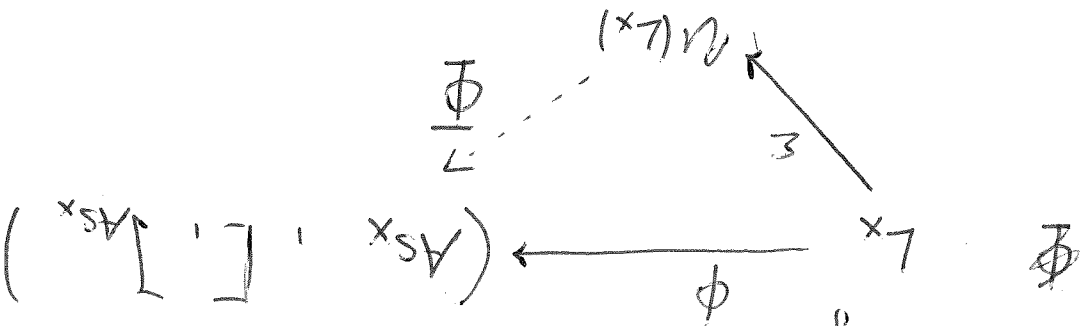
Auch für Hgr und Lgr kann man etwas technisch aufbereiten, freie Ugebren definieren.

Sei $L_X \in \text{Lgr}$ die freie Lie-Ugebren zu X .

① Die universelle Eigenschaft von L_X liefert



② Die universelle Eigenschaft von $U(L_X)$ liefert



Prop. 15.1 $\bar{\Phi}$ ist ein Iso. von assoziierten K-Algebren.

Corollary 15.2 ϕ ist injektiv.

16 Die Campbell-Hausdorff-Formel

K beliebig, $X = \{X_1, \dots, X_d\}$

$A_X = \text{Ring}$ nicht-kommutativer Polynome in $X_1, \dots, X_d$
 $\hat{A}_X = \text{Ring}$ nicht-kommutativer Potenzreihen
 $\tilde{m}_X \subseteq A_X$ sei das 2-reiche Ideal der Potenzen
 reichen ohne konstanten Term.

Dann gilt: $\hat{A}_X^* = \hat{A}_X \setminus \tilde{m}_X$

$$1 + \tilde{m}_X \leq \hat{A}_X^* \quad (\text{Lemma 16.1})$$

Für $u \in \tilde{m}_X$ hat man einen additiven homom.

$$\varepsilon_u : K[[T]] \rightarrow \hat{A}_X^*, \quad T \mapsto 1 + u$$

$$\text{Proposition 16.2} \quad \exp : \tilde{m}_X \rightarrow 1 + \tilde{m}_X, \quad u \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$$

$$\log : 1 + \tilde{m}_X \rightarrow \tilde{m}_X, \quad 1 + u \mapsto -\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n u^n}{n}$$

und verknüpfte und zweifach invertiert.

Auf ähnliche Weise kann man $L_X \subseteq A_X$ exemplifizieren und erhält

$$L_X \subseteq \hat{A}_X^*$$

$$\{a \in \hat{A}_X^* : \hat{\Delta}(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$$

Bsp: $\hat{\Delta}(X_1 X_2) = \hat{\Delta}(X_1) \hat{\Delta}(X_2) = (X_1 \otimes 1 + 1 \otimes X_1)(X_2 \otimes 1 + 1 \otimes X_2)$
 $= X_1 X_2 \otimes 1 + 1 \otimes X_1 X_2 + X_1 \otimes X_2 + X_2 \otimes X_1$

Theorem 16.5 (Campbell-Hausdorff) Sei $\text{char}(k) = 0$.

Dann ist $\exp: \hat{L}_X \rightarrow \{b \in 1 + \hat{m}_X : \hat{\Delta}(b) = b \circ b\}$ eine Bijektion. Die rechte Seite ist eine U'gt. von $1 + \hat{m}_X$.

Folgerung 16.6 Sei $\text{char}(k) = 0$. Dann ist $\hat{L}_X$ mit der Multiplikation

$$a \circ b := \log(\exp(a) \cdot \exp(b))$$

eine Gruppe.

Definition: Sei $k = \mathbb{Q}$ und $X = \{Y, Z\}$. Dann heißt

$$H(Y, Z) := Y \circ Z = \log(\exp(Y) \cdot \exp(Z))$$

Hausdorff-Reihe.

Es gilt: $\exp(Y) \cdot \exp(Z) = 1 + W$ mit $W = \frac{Y^r Z^s}{r! s!}$

und $H(Y, Z) = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m} W^m$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{H_{r,s}}{r+s=n}$$

$$= H_n$$

mit $H_{r,s} = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_m = r \\ s_1 + \dots + s_m = s \\ r_i + s_i \geq 1}} \frac{(-1)^m}{m} \prod_{i=1}^m \frac{Y^{r_i} Z^{s_i}}{r_i! s_i!}$

Beispiele: $H_{1,0} = Y, H_{0,1} = Z, H_1 = Y + Z$

$$H_2 = H_{2,0} + H_{1,1} + H_{0,2} = H_{1,1} = \frac{1}{2} [Y, Z]$$

Begrenzung:

$$H_{n,1} = \sum_{\substack{r_1=1 \\ s_1=1 \\ m=1}}^{\infty} YZ - \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{r_1+r_2=1 \\ s_1+s_2=1 \\ r_1+s_1 \geq 1}} \frac{1}{2} YZ + \sum_{\substack{r_1=1 \\ s_1=1}} \frac{1}{2} YZ \right)$$

$$= YZ - \frac{1}{2} (YZ + ZY) = \frac{1}{2} [Y, Z]$$

Ebenso zeigt eine leichte Rechnung: $H_{0,2} = H_{2,0} = 0$.
 $(r_1, r_2, s_1, s_2) \in \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$

Definition: Sei V ein K -VR als Dimension $d < \infty$.
 Sei $e_1, \dots, e_d$ eine Basis. Eine Abbildung

$$f: V \times V \rightarrow V$$

heißt polynomial, falls es Polynome $P(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_d)$ gibt, so dass

$$f\left(\frac{a}{d} a e_1, \frac{b}{d} b e_2\right) = \frac{1}{d} P(a_1, b_2) e_1$$

für alle a und b in K gilt.

Bemerkung: Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Bew: $\text{Pol}(V \times V, V)$

Falls $V = \mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra ist, so ist $\text{Map}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ eine Lie-Algebra.

$$[f, g](x, y) := [f(x), g(x, y)]$$

eine Lie-Algebra.

Corollary 16.11 $\text{Par}(q \times q, q) = \text{Map}(q \times q, q)$

ist eine Lie-Schließgruppe.

Betrachte nun $\{y, z\} \rightarrow \text{Par}(q \times q, q), y \mapsto p_1, z \mapsto p_2$

definiert die universellen Eigenschaft von $\wedge\{y, z\}$ erhält man

$$\Theta: \wedge\{y, z\} \rightarrow \text{Par}(q \times q, q)$$

Θ liegt nie fortsetzen zu

$$\tilde{\Theta}: \tilde{\wedge}\{y, z\} \rightarrow \tilde{\text{Par}}(q \times q, q)$$

nach Wahl einer Basis $e_1, \dots, e_d$ von q kann man dies analog zu $\text{Par}(q \times q, q)$ definieren, indem man Polynome durch Polynome ersetzt.

Definition

$$\tilde{H} := \tilde{\Theta}(H) \in \tilde{\text{Par}}(q \times q, q)$$

$$\sum_{r+s \geq 1} \tilde{H}_{r,s} \text{ mit } \tilde{H}_{r,s} = \Theta(H_{r,s}) \in \tilde{\text{Par}}_{r,s}(q \times q, q)$$

Beispiele:

$$\tilde{H}_{1,0} = p_1, \tilde{H}_{0,1} = p_2$$

$$\tilde{H}_{1,1} = q \times q \rightarrow q, (x, y) \mapsto \frac{1}{2}[x, y]$$

17 Die Konvergenz der Hausdorff-Reihe

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $e_1, \dots, e_d$ eine Basis.

Betrachte $\tilde{H}$ als d -Tupel von formalen Potenzreihen in

$$Z = (x_1, \dots, x_d), \quad \bar{Z} = (z_1, \dots, z_d)$$

Setze

$$H(Z, \bar{Z}) = (H_{(1)}(Z, \bar{Z}), \dots, H_{(d)}(Z, \bar{Z}))$$

falls

$$\frac{d}{dt} \tilde{H}(\bar{Z} a, e; \bar{Z} b, e) = \frac{d}{dt} H_{(e)}(a, b) e$$

Man kann zeigen:

$$(1) \quad H(\bar{Z}, 0) = Z, \quad H(0, \bar{Z}) = \bar{Z}$$

$$(2) \quad H(\bar{Z}, -Z) = 0$$

$$(3) \quad H(\bar{u}, H(\bar{Z}, \bar{Z})) = H(H(\bar{u}, Z), \bar{Z})$$

Zentraler Resultat von diesem Abschnitt:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ mit } H(Z, \bar{Z}) \in \tilde{F}_\varepsilon(K^d \times K^d; K^d) \text{ und}$$

$$\|H\| \leq \varepsilon$$

Betrachte dann $G_\varepsilon := B_\varepsilon(0) \subseteq K^d$ zusammen mit der Multiplikation

$$G_\varepsilon \times G_\varepsilon \rightarrow G_\varepsilon, \quad (g, h) \mapsto gh = H(g, h)$$

Dann ist G_ε eine d -dimensionale Lie-Gruppe und $Lie(G_\varepsilon) \cong \mathfrak{g}$. (Prop. 17.2 und 17.3)

Definition: $\{G_2\}$ heißt Campbell-Hausdorff-

Liegruppen - Kern.

Erinnerung: Wenn G eine Liegruppe ist, so ist $Lie(G) = T_e(G)$ die zugehörige Lie-Algebra. Falls $f: G_1 \rightarrow G_2$ so hat man

$$Lie(f) = T_e(f): Lie(G_1) \rightarrow Lie(G_2).$$

Mit viel Arbeit kann man nun zeigen:

Satz 18.17 Seien G_1, G_2 Liegruppen und

$\varphi: Lie(G_1) \rightarrow Lie(G_2)$ ein Homom. von Liealgebren. Dann gilt es offene Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ sowie $f: H_1 \rightarrow H_2$ mit $Lie(f) = \varphi$.

Folgerung 18.18 Falls $Lie(G_1) \cong Lie(G_2)$, so gilt es offene Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und einen Iso. $H_1 \cong H_2$

Corollary 18.19 Sei G eine Liegruppe und

$\{G_2\}_{2>0}$ das Campbell-Hausdorff-Liegruppen-Kern.

zu $\varphi = Lie(G)$. Dann gilt es für genügend kleines $\varepsilon > 0$ einen Homomorphismus

$$\exp_{G, \varepsilon}: G_2 \rightarrow G,$$

so daß 1) $\exp_{G, \varepsilon}(G_2) \subseteq G$ offen ist

2) $\exp_{G, \varepsilon}$ ein Iso. von Liegruppen auf das Bild ist

$$(iii) \quad Lie(\exp_{G, \varepsilon}) = \varphi \text{ of } Lie(G)$$