Explizite Klassenkörpertheorie

gelesen von Prof. Dr. Werner Bley

Ludwig-Maximilians-Universität München – Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Vorlesung 1
Apr 14, 2026

Sei $K/\mathbb{Q}$ abelsch. Dann besagt der Satz von Kronecker-Weber, dass $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$ für ein geeignetes n gilt, wobei ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. O.E. können wir $\zeta_n \in \mathbb{C}$ annehmen, z.B. $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$. Einheitswurzeln sind dabei genau die Punkte endlicher Ordnung auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

Sei k imaginär-quadratisch, und $E/\mathbb{C}$ eine elliptische Kurve. Dann ist $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$ für ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit ω_1, ω_2 $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Betrachte $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_k$. Sei $k(1)$ der Hilbertsche Klassenkörper von k, d.h. die maximale unverzweigte abelsche Erweiterung von k. $k(1)/k$ ist endlich Galois, mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k(1)/k) \cong \mathrm{cl}_k$. Es gilt $k(1) = k(j(E))$, wobei $j(-)$ eine wichtige Invariante von elliptischen Kurven ist.

Sei weiter $k(\mathfrak{m})$ ein Strahlklassenkörper mod $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$, da k keine reellen Stellen hat. Als Verallgemeinerung des Satzes von Kronecker-Weber gilt, dass jede endliche abelsche Erweiterung von k in eimem Strahlkörper enthalten ist. Auch diese kann man explizit beschreiben: Es gilt im Wesentlichen $k(\mathfrak{m}) = k(j(E), \tau(1 \mid \mathfrak{m}))$, wobei τ die Webersche τ-Funktion ist. $\tau(1 \mid \mathfrak{m})$ ist die x-Koordinate eines Torsionspunktes auf $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_k$. Solche elliptischen Kurven haben sog. *komplexe Multiplikation*, weil sie (im Gegensatz zu den meisten elliptischen Kurven) nicht nur die Multiplikation mit ganzen Zahlen, sondern auch mit (komplexen) Elementen aus $\mathcal{O}_k$ erlauben.

Bevor wir diese globalen Fragen betrachten, werden wir mit der lokalen Situation beginnen. Sei $k/\mathbb{Q}_p$ abelsch. Wie oben wollen wir explizite Beschreibungen von Strahlklassenkörpern $k(\mathfrak{m})$ finden. Dies ist die sogenannte Lubin-Tate-Theorie. Als Literatur werden wir [Iwa86] folgen.

Explizite Klassenkörpertheorie in dem obigen Sinn gibt es auch für globale Körper mit positiver Charakteristik, d.h. endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_p(T)$. Das ist die Theorie der Drinfeld-Moduln, die wir hier aber nicht betrachten werden.

1 Bewertungen und Komplettierungen

1.1 Grundlagen

Sei k ein Körper und $\nu : k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Bewertung, z.B. k ein Zahlkörper und $\nu = \nu_\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_k$, oder $k = F(T)$ für einen Körper F und $\nu = \nu_P$ für ein irreduzibles Polynom P, oder $\nu_\infty(\frac{f}{g}) := \deg(g) - \deg(f)$.

Definition 1.1. Zu $x \in k$, $\alpha > 0$ sei

$$B_\alpha(x) = N(x, \alpha) = \{y \in K \mid \nu(x - y) > \alpha\}.$$

Dies induziert eine Topologie auf k, die ν-Toplogie.

Eine Menge $U \subseteq k$ is also offen genau dann, wenn für alle $x \in U$ ein $\alpha > 0$ existiert mit $N(x, \alpha) \subseteq U$. Wenn $\nu \sim \mu$ äquivalent sind, also $\mu = a\nu$ für ein $a > 0$, dann erzeugen ν und μ die gleiche Topologie. Das ist sogar eine Äquivalenz. Setze $|x|_\nu := a^{-\nu(x)}$ für beliebiges $a > 1$. Das ist ein nicht-archimedischer Betrag auf k. Man sieht

$$N(x, \alpha) = \{y \in k \mid |x - y|_\nu < a^{-\alpha}\}.$$

Beispiel 1.2. Sei $k/\mathbb{Q}_p$ endlich. $\mathfrak{p}_k^n$ sind (offene und abgeschlossene) Umgebungen der 0, und jedes $N(x, \alpha)$ ist von der Form $x + \mathfrak{p}_k^n$ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3. (a) ν heißt diskret, wenn $\nu(k^\times) = \mathbb{Z}\beta$ für ein $\beta > 0$.

(b) ν heißt normalisiert, wenn $\nu(k^\times) = \mathbb{Z}$.

Sei k'/k eine Körpererweiterung, und ν' eine Bewertung auf k'. Dann ist $\nu = \nu'|_k$ eine Bewertung auf k. Sei $\mathcal{O}' = \{x \in k' \mid \nu'(x) \geq 0\}$ der Bewertungsring mit Bewertungsideal $\mathfrak{p}' = \{x \in k' \mid \nu'(x) > 0\}$, und analog $\mathcal{O} \supseteq \mathfrak{p}$ für k. Dann gilt $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap k$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap k = \mathfrak{p}' \cap \mathcal{O}$. Setze weiter $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ und $\kappa' = \mathcal{O}'/\mathfrak{p}'$. Dann induziert die Inklusion eine Einbettung $\kappa \hookrightarrow \kappa'$.

Definition 1.4. $e = e(\nu' \mid \nu) = [\nu'(k'^\times) : \nu(k^\times)]$ heißt Verzweigungsindex, und $f = f(\nu' \mid \nu) = [\kappa' : \kappa]$ heißt Restklassenkörpergrad.

Es gilt $e, f \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Beispiel 1.5. Sei $k = \mathbb{Q}_p$ und $\Omega = \mathbb{Q}_p^c$ ein algebraischer Abschluss. $\nu = \nu_p$ hat eine eindeutige Fortsetzung auf Ω, vermöge $\nu'(x) = \frac{1}{[k(x):k]}\nu(\mathrm{N}_{k(x)/k}(x))$ für $x \in \Omega$. Man sieht $\nu'(\Omega^\times) = \mathbb{Q}$, z.B. $\nu'(p^{1/n}) = \frac{1}{n}$. Also ist $e = \infty$. Weiter ist $\kappa' = \mathbb{F}_p^c/\mathbb{F}_p = \kappa$, also auch $f = \infty$. Ω ist nicht mehr vollständig bezüglich ν', aber die Komplettierung $\hat{\Omega} = \mathbb{C}_p$ von Ω ist sowohl vollständig als auch algebraisch abgeschlossen.

Proposition 1.6. *Sei (k, ν) vollständig, und k'/k eine algebraische Erweiterung. Dann gibt es eine eindeutige Fortsetzung ν' von ν auf k'. Falls $[k' : k] = n < \infty$, so gilt*

$$\nu'(x) = \frac{1}{n}\nu(\mathrm{N}_{k'/k}(x))$$

für alle $x \in k'^\times$. In diesem Fall ist (k', ν') wieder vollständig.

Folgerung 1.7. *Sei (k, ν) vollständig, und k'/k eine algebraische Erweiterung. Sei $\sigma : k' \to k'$ ein k-Homomorphismus. Dann gilt $\nu' \circ \sigma = \nu'$, und daher $\sigma(\mathcal{O}') = \mathcal{O}'$ und $\sigma(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}'$. Weiter ist folglich $\overline{\sigma} : \kappa' \to \kappa'$, $x + \mathfrak{p}' \mapsto \sigma(x) + \mathfrak{p}'$ ein wohldefinierter κ-Homomorphismus.*

Bemerkung 1.8. Seien (k', ν') und (k'', ν'') vollständige Erweiterungen von (k, ν) mit $\nu'|_k = \nu''|_k = \nu$. Sei $k \subseteq k', k''$ dicht. Dann gibt es einen k-Homomorphismus $\sigma : k' \to k''$ mit $\nu''(\sigma(x)) = \nu'(x)$ für alle $x \in k'$.

Skizze. Sei $x = \nu'\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in k$. Setze $\sigma(x) := \nu''\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$. □

Anwendung: Sei $(K, \mu)/(k, \nu)$, und (K, μ) vollständig. Schreibe $\overline{k}$ für den topologischen Abschluss von k in K bezüglich der μ-Topologie. Dann ist $\overline{k}$ ein Teilkörper von K, und $(\overline{k}, \mu|_{\overline{k}})$ ist vollständig: Seien $x = \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{k}$, mit $x_n, y_n \in k$. Dann ist $x + y = \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n + y_n \in \overline{k}$, und analog für Differenzen, Produkte und Quotienten (ist $y \neq 0$, dann auch $y_n \neq 0$ für $n \gg 0$.). Also ist $\overline{k}$ ein Körper. Für die Vollständigkeit sei $x'_1, x'_2, \ldots$ eine Cauchy-Folge in $\overline{k}$. Dann konvergiert $(x'_n)_n$ gegen ein $x \in K$, da K vollständig ist. Sei $x'_n = \nu\text{-}\lim_{i\to\infty} x_{ni}$ mit $x_{ni} \in K$. Definiere $x_n := x_{ni}$ mit i groß genug, sodass $|x'_n - x_{ni}| < \frac{1}{n}$. Dann folgt

$$|x - x_n|_\mu = |x - x'_n + x'_n - x_n| \leq |x - x'_n| + |x'_n - x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also $x = \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{k}$.

1.2 Vollständige Körper

Definition 1.9. (k, ν) heißt vollständig, falls ν vollständig und normalisiert ist.

Beispiel 1.10. (i) Sei $k/\mathbb{Q}_p$ endlich, $\nu = \nu_p$. Dann ist (k, ν) mit dieser Definition i.A. nicht vollständig, da $\nu_p(k^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$, wobei $p\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}^e$. Stattdessen ist k bezüglich $\nu_\mathfrak{p} = e\nu_p$ vollständig.

Vorlesung 2
Apr 21, 2026

(ii) Sei F ein Körper und $k = F((T))$ der Körper der Laurent-Reihen. Dieser ist bezüglich $\nu(\sum_{n\geq k} a_n T^n) = k$, falls $a_k \neq 0$, vollständig. (Genauer gesagt ist k die Vervollständigung von $F(T)$ bezüglich der Bewertung assoziiert zu T.)

Sei $\pi \in k^\times$ ein Primelement, d.h. $\nu(\pi) = 1$. Dann sind alle nichttrivialen Ideale von $\mathcal{O}_k$ von der Form $\pi^n \mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_k^n$, $n \geq 0$. Weiter bilden die $\mathfrak{p}_k^n$ eine Umgebungsbasis der 0 in der ν-Topologie. Wegen $\nu(x) \geq n \Leftrightarrow \nu(x) > n-1$ sind die $\mathfrak{p}_k^n$ offen und abgeschlossen.

Lemma 1.11. (k, ν) *ist total unzusammenhängend und nicht diskret.*

Beweis. Sei $x \in k$ und U die Zusammenhangskomponente von x. Angenommen $x \neq y \in U$. Setze $m := \nu(x-y) \in \mathbb{Z}$ und betrachte

$$W_1 := \{z \in U \mid \nu(z-x) > m\} \ni x \quad \text{und} \quad W_2 := \{z \in U \mid \nu(z-x) \leq m\} \ni y.$$

Dann gilt $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ und W_1, W_2 sind offen, im Widerspruch dazu, dass U zusammenhängend ist. Dass k nicht diskret ist, ist klar, da zum Beispiel $\{0\} \subseteq k$ nicht offen ist. □

Notation: Wir schreiben $k^\times = \langle \pi \rangle \times \mathcal{U}$ mit $\mathcal{U} := \mathcal{U}_0 := \mathcal{U}_k := \mathcal{O}_k^\times$ und allgemeiner

$$\mathcal{U}_n := 1 + \mathfrak{p}^n = \{z \in k^\times \mid \nu(z-1) \geq n\}$$

für $n \geq 1$. Sei weiter $\kappa := \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_k$. In der algebraischen Zahlentheorie wurde gezeigt, dass $\mathcal{U}_0/\mathcal{U}_1 \to \kappa^\times$, $\eta\mathcal{U}_1 \mapsto \eta + \mathfrak{p}_k$ und $\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n+1} \to \mathfrak{p}_k^n/\mathfrak{p}_k^{n+1}$, $a\mathcal{U}_{n+1} \mapsto a + \mathfrak{p}_k^n$ für $n \geq 1$ Isomorphismen sind. Verkettet man letzteren mit dem (nicht-kanonischen) Isomorphismus $\mathfrak{p}_k^n/\mathfrak{p}_k^{n+1} = \pi^n\mathcal{O}_k/\pi^{n+1}\mathcal{O}_k \to \kappa$ durch Multiplikation mit π^{-n}, erhält man $\mathcal{U}_n/\mathcal{U}_{n+1} \cong \kappa$ für $n \geq 1$.

Bemerkung 1.12. $k^\times$ ist eine topologische Gruppe, und die $1 + \mathfrak{p}_k^n$ bilden eine Umgebungsbasis der 1. Wie in 1.11 ist $k^\times$ total unzusammenhängend und nicht diskret.

Fixiere für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Element $\pi_n \in k^\times$ mit $\nu(\pi_n) = n$ (z.B. $\pi_n = \pi^n$). Sei $A \subseteq \mathcal{O}_k$ ein vollständiges Vertretersystem von $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}_k$.

Proposition 1.13 (Verallgemeinerte p-adische Entwicklung)**.** *(i) Jedes $x \in k^\times$ hat eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi_n$ mit $a_n \in A$. Falls $a_i \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < i$, so gilt $\nu(x) = i$.*

(ii) Falls $x = \sum_{-\infty \ll n} a_n \pi_n$ und $y = \sum_{-\infty \ll n} b_n \pi_n$ mit $a_n, b_n \in A$, so ist $\nu(x-y) \geq i$ genau dann, wenn $a_n = b_n$ für alle $n < i$ gilt.

Beispiel 1.14. (i) Für $k = \mathbb{Q}_p$ und $\pi_n = p^n$ erhält man die gewöhnliche p-adische Entwicklung.

(ii) Sei $k = F((T))$ wie in Beispiel 1.10. Dann kann man $A = F$ wählen.

Bemerkung 1.15. Sei k'/k endlich, und (k, ν) vollständig. Sei μ die eindeutige Fortsetzung von ν auf k' und $\mathcal{O}_{k'}$ der zugehörige Bewertungsring. Dieser ist auch der ganze Abschluss von $\mathcal{O}_k$ in k'. Sei $\mathfrak{p}_k\mathcal{O}_{k'} = \mathfrak{p}_{k'}^e$ und $f = [\kappa' : \kappa]$. Dann gilt $ef = n$ und $\nu' := e\mu$ ist *die* normalisierte Bewertung auf k'.

Sei nun (k, ν) ein lokaler Körper, d.h. k ist vollständig und $|\kappa| < \infty$, also z.B. k eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ oder $k = F((T))$ mit F ein endlicher Körper. Sei Ω ein algebraischer Abschluss von k. Sei $(\overline{\Omega}, \overline{\mu})$ die Vervollständigung von Ω bezüglich der eindeutigen Fortsetzung μ von ν auf Ω.

Betrachte eine algebraische Erweiterung $\Omega/F/k$. Sei $\overline{F}$ der topologische Abschluss von F in $\overline{\Omega}$ bezüglich der $\overline{\mu}$-Topologie. Dann ist $(\overline{F}, \overline{\mu}|_{\overline{F}})$ die Vervollständigung von F.

Bemerkung 1.16. Ist $[F : k] < \infty$, dann ist F vollständig. Also ist in diesem Fall $\overline{F} = F$.

Lemma 1.17. *Sei $\Omega/E/F/k$ ein Turm von algebraischen Erweiterungen mit $[E : F] < \infty$. Dann gilt*

(i) $\overline{E} = E\overline{F}$.
(ii) Ist E/F separabel, dann ist $E \cap \overline{F} = F$.

Beweis. (i) Betrachte die Körpererweiterungen

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{E} \arrow[d, dash] \\
 & E\overline{F} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
E \arrow[d, dash] & \overline{F} \arrow[dl, dash] \\
E \cap \overline{F} \arrow[d, dash] & \\
F &
\end{tikzcd}$$

$(\overline{F}, \overline{\mu}|_{\overline{F}})$ ist vollständig und $[E\overline{F} : \overline{F}] < \infty$, also ist auch $(E\overline{F}, \overline{\mu}|_{E\overline{F}})$ vollständig. Dann ist $E\overline{F}$ abgeschlossen, und $\overline{E} = E\overline{F}$.

(ii) Sei $E' \subseteq \Omega$ der normale Abschluss von E/F. Dann ist E'/F Galoissch, und es reicht zu zeigen, dass $E' \cap \overline{F} = F$. Ohne Einschränkung sei also E/F Galoissch. Dann folgt $[\overline{E} : \overline{F}] = [E : E \cap \overline{F}]$. Andererseits betrachte $\varphi : \mathrm{Gal}(E/F) \to \mathrm{Gal}(\overline{E}/\overline{F})$, $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$, wobei $\overline{\sigma}(\overline{\mu}\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n) := \mu\text{-}\lim_{n\to\infty} \sigma(a_n)$ für Cauchy-Folgen $(a_n)_n \subset E$. Diese Abbildung φ ist offensichtlich injektiv, also ist $[E : F] \leq [\overline{E} : \overline{F}] = [E : E \cap \overline{F}]$ und damit $F = E \cap \overline{F}$. $\square$

1.3 Einschub: Unendliche Galois-Theorie

Im Folgenden werden wir Galois-Theorie für (im Allgemeinen) unendliche Körpererweiterungen benötigen. Wir sammeln hier kurz die wesentlichen Resultate ohne Beweis. Ausführliche Behandlungen dieses Themas findet man zum Beispiel in [Bos20] oder [Neu06]. Sei Ω/k eine Galoiserweiterung.

Beispiel 1.18. (i) Für jedes k kann man $\Omega = k^c$ den separablen Abschluss, oder $\Omega = k^{\mathrm{ab}} := \bigcup_K K$ mit K/k endlich abelsch betrachten.
(ii) Eine wichtige Erweiterung z.B. in der Iwasawa-Theorie ist $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}$.

Die Nebenklassen $\sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K)$ für K/k endlich Galoissch bilden die Basis einer Topologie auf $G := \mathrm{Gal}(\Omega/k)$, der sogenannten *Krull-Topologie*. Explizit ist $U \subseteq \mathrm{Gal}(\Omega/k)$ offen genau dann, wenn es für alle $\sigma \in U$ eine endliche Galoiserweiterung K/k gibt mit $\sigma\,\mathrm{Gal}(\Omega/K) \subseteq U$. Damit wird G zu einer topologischen Gruppe.

Satz 1.19. *G ist Hausdorff und kompakt.*

Lemma 1.20. *Es gilt $G \cong \varprojlim_K \mathrm{Gal}(K/k) \cong \varprojlim_K G/\mathrm{Gal}(\Omega/K)$, wobei K jeweils über alle endlichen Galoiserweiterungen K/k läuft.*

Satz 1.21 (Hauptsatz der Galois-Theorie)**.** *Die Zuordnungen $K \mapsto \mathrm{Gal}(\Omega/K) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) = \alpha,\ \forall \alpha \in K\}$ und $\Omega^H \mapsfrom H$ bilden zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen zwischen den Teilerweiterungen $\Omega/K/k$ und den abgeschlossenen Untergruppen $H \subseteq \mathrm{Gal}(\Omega/k)$. Die offenen Untergruppen entsprechen dabei genau den K/k mit $[K : k] < \infty$. Weiter gelten die üblichen Zusätze, z.B. ist K/k normal genau dann, wenn $\mathrm{Gal}(\Omega/K) \trianglelefteq G$.*

1.4 Die maximal unverzweigte Erweiterung

Lemma 1.22. *Sei (k,ν) lokal. Sei Ω/k ein algebraischer Abschluss und $\Omega/F/k$ eine algebraische Erweiterung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *F/k ist unverzweigt, d.h. jede endliche Zwischenerweiterung $F/L/k$ ist unverzweigt.*
(ii) $\mu(F^\times) = \mathbb{Z}$.
(iii) $\overline{\mu}(\overline{F}^\times) = \mathbb{Z}$.

Beweis. Übung. □

Wir schreiben k_{ur}^n für die eindeutige unverzweigte Erweiterung von k vom Grad n. k_{ur}^n ist der Zerfällungskörper von $X^{q^n} - X$ mit $q = |\kappa|$. Weiter ist k_{ur}^n zyklisch mit $\operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}^n) = \langle \varphi_n \rangle$, wobei φ_n eindeutig durch $\varphi_n(\alpha) \equiv \alpha^q \mod \mathfrak{p}_{k_{\text{ur}}^n}$ für alle $\alpha \in \mathcal{O}_{k_{\text{ur}}^n}$ bestimmt ist. Es gilt $k_{\text{ur}}^n \subseteq k_{\text{ur}}^m$ genau dann, wenn $n \mid m$.

Definition 1.23. Wir schreiben $K := k_{\text{ur}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} k_{\text{ur}}^n \subseteq \Omega$ für *die* maximal unverzweigte Erweiterung von k (in Ω). Weiter sei $\mathcal{O}^n \subseteq k_{\text{ur}}^n$ der Bewertungsring und κ^n der Restklassenkörper von k_{ur}^n, und κ_K der Restklassenkörper von K.

Satz 1.24. *(i)* *κ_K ist ein algebraischer Abschluss von κ.*
(ii) $\operatorname{Gal}(k_{ur}/k) \to \operatorname{Gal}(\kappa_K \mid \kappa)$, *$\sigma \mapsto \sigma'$, wobei $\sigma'(x + \mathfrak{p}_K) := \sigma(x) + \mathfrak{p}_K$ ist ein Isomorphismus von topologischen Gruppen.*

Vorlesung 3 Apr 28, 2026

Beweis. (i) Aus der Definition von K folgt direkt $\kappa_K = \bigcup_{n\geq} \kappa^n$. Da κ als endlicher Körper genau eine Erweiterung von Grad n (in einem fixierten algebraischen Abschluss) hat, folgt die Behauptung mit $[\kappa^n : \kappa] = n$.

(ii) $\operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}/k) \cong \varprojlim_n \operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}^n/k) \cong \varprojlim_n \operatorname{Gal}(\kappa^n/\kappa) \cong \operatorname{Gal}(\kappa_K/\kappa)$ □

Bemerkung 1.25. Genauer gilt in (ii)

$$\operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}/k) \cong \varprojlim_n \operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}^n/k) = \varprojlim_n \langle \varphi_n \rangle \cong \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =: \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Sei $\varphi_k \in \operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}/k)$ das eindeutig bestimmte Element mit Bild φ_n unter den kanonischen Projektionen $\operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}/k) \to \operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}^n/k)$. Dann gilt $\varphi_k(\alpha) \cong \alpha^q \mod \mathfrak{p}_K$ für alle $\alpha \in K$. φ_k erzeugt eine dichte Untergruppe $\langle \varphi \rangle \cong \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}} \cong \operatorname{Gal}(k_{\text{ur}}/k)$, und es folgt $k_{\text{ur}}^{\langle \varphi_k \rangle} = k_{\text{ur}}^{\overline{\langle \varphi_k \rangle}} = k$, d.h. $\varphi_k(\alpha) = \alpha$ genau für $\alpha \in k$.

Sei nun F/k eine endliche Erweiterung. Dann ist Fk_{ur}/F unverzweigt, ist also in F_{ur} enthalten. Wir wollen zeigen, dass hier sogar $Fk_{ur} = F_{ur}$ gilt.

Definition 1.26. (i) $V_\infty \subseteq \Omega^\times$ sei die Gruppe der Einheitswurzeln von p'-Ordnung, d.h. von Ordnung prim zu p.
(ii) $V_n := \mu_{q^n - 1} \subseteq V_\infty \subseteq \Omega^\times$.

Bemerkung 1.27. Es ist $V_\infty = \bigcup_{n \geq 1} V_n$, denn wenn $\varepsilon^m = 1$, $p \nmid m$, dann betrachte $L := k(\varepsilon)$. Es gilt $L^\times = \pi_L^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q^f - 1} \times U_L^{(1)}$, und es genügt zu zeigen, dass $U_L^{(1)}$ keine Einheitswurzeln von p'-Ordnung enthält. Aber $U_L^{(1)}$ ist ein $\mathbb{Z}_p$-Modul, wenn also $\eta^m = 1$ mit $m \in \mathbb{Z}_p^\times$ gilt, folgt sofort $\eta = \eta^{mm^{-1}} = 1$.

Lemma 1.28. *Die Abbildung $V_\infty \to \kappa_K^\times$, $\eta \mapsto \overline{\eta} := \eta + \mathfrak{p}_K$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\eta \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_K$. Dann gibt es ein n mit $\eta \in \mu_{q^n-1} \cap (1+\mathfrak{p}_K) = \mu_{q^n-1} \cap (1+\mathfrak{p}_{k_{\text{ur}}^n}) = 1$ nach der obigen Bemerkung. Also ist die Abbildung injektiv. Für die Surjektivität sei $\overline{\eta} \in \kappa_K^\times = \bigcup_{n\geq 1} (\kappa^n)^\times$. Sei $\overline{\eta} \in (\kappa^n)^\times$, dann ist $\overline{\eta}$ eine Einheitswurzel der Ordnung $q^n - 1$. Diese kann man mit Hensels Lemma liften. $\square$

Proposition 1.29. *Sei $\eta \in V_\infty$. Dann ist $\varphi_k(\eta) = \eta^q$.*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi_k(\eta) \equiv \eta^q \bmod \mathfrak{p}_K$, und die Behauptung folgt aus der Injektivität in Lemma 1.28. $\square$

Sei nun F/k endlich. Dann ist $k_{\text{ur}} = k(V_\infty)$, also $Fk_{\text{ur}} = F(V_\infty) = F_{\text{ur}}$.

1.5 Voll verzweigte Erweiterungen

Bemerkung 1.30. Sei k'/k endlich. Dann ist k'/k voll verzweigt genau dann, wenn $k' \cap k_{\text{ur}} = k$: Seien e, f der Verzweigungs- bzw. Trägheitsgrad von k'/k. Dann wissen wir aus der Zahlentheorie, dass $[k' \cap k_{\text{ur}}] = f$.

Sei jetzt F/k voll verzweigt, d.h. k'/k voll verzweigt für alle $k \subseteq k' \subseteq F$ mit k'/k endlich. Aus der Bemerkung für den endlichen Fall folgt sofort, dass dies äquivalent ist zu $F \cap k_{\text{ur}} = k$.

Notation: Wir schreiben $k \subseteq_f k'$ für eine endliche Körpererweiterung k'/k.

Lemma 1.31. *Sei $F \subseteq_f F' \subseteq Fk_{ur}$. Dann ist F'/F unverzweigt. Also ist F/k eine maximal voll verzweigte Erweiterung von k in Fk_{ur}.*

Beweis. Restriktion liefert eine injektive Abbildung $G_0(F'/F) \hookrightarrow G_0(F' \cap k_{\text{ur}}/k) = 1$. Also ist F'/F ebenfalls unverzweigt. $\square$

Beispiel 1.32. Sei $k = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. Es ist $\mathbb{Q}_p^\times \cong p^{\mathbb{Z}} \times \mu_{p-1} \times \mathbb{Z}_p$, also $\mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und nach Kummer-Theorie gibt es genau 3 quadratische Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$, eine davon ist die unverzweigte k_{ur}^2. Schreibe K_1, K_2 für die beiden verzweigten quadratischen Erweiterungen, dann sind $K_1, K_2 \subseteq K_1 k_{\text{ur}}^2$, es gibt also keine eindeutige maximale voll verzweigte Erweiterung in $K_1 k_{\text{ur}}^2$.

Lemma 1.33. *Sei $E/k_{ur}/k$ mit E/k Galoissch. Sei $\psi \in \mathrm{Gal}(E/k)$ ein Lift von $\varphi_k \in \mathrm{Gal}(k_{ur}/k)$. Sei $F := E^{\langle\psi\rangle}$. Dann gilt*

(i) $Fk_{ur} = E$,
(ii) $k_{ur} \cap F = k$,
(iii) Die Restriktion $\mathrm{Gal}(E/F) \to \mathrm{Gal}(k_{ur}/k)$ *ist ein Isomorphismus,*
(iv) F *ist eine maximale voll verzweigte Erweiterung in* E/k.

Beweis. A priori haben wir folgende Situation:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & E \arrow[d] \\
 & Fk_{\text{ur}} \arrow[dl] \arrow[d] \\
F \arrow[d] & k_{\text{ur}} \arrow[dl] \\
F \cap k_{\text{ur}} \arrow[d] & \\
k &
\end{tikzcd}
$$

Es gilt $F \cap k_{\text{ur}} = k_{\text{ur}}^{\langle \psi|_{k_{\text{ur}}}\rangle} = k_{\text{ur}}^{\langle \varphi_k \rangle} = k$ nach Bemerkung 1.25. Sei $F \subseteq_f M \subseteq E$, $[M : F] = n$. Setze $F' = F k_{\text{ur}}^n$ und $F'' = MF'$. Da $\langle \psi \rangle$ dicht in $\mathrm{Gal}(E/F)$ liegt, folgt, dass $\mathrm{Gal}(F''/F)$ endlich zyklisch ist, erzeugt von $\psi|_{F''}$. Dann ist $M = F'$, da F''/F also nur einen Zwischenkörper vom Grad n hat. Da M beliebig war, folgt (i). (iii) ist dann Galoistheorie, und (iv) folgt mit Lemma 1.31. □

1.6 Normgruppen

Lemma 1.34. *Sei $k \subseteq_f k' \subseteq \Omega$. Dann*

(i) $\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k')) \subseteq \mathcal{U}(k)$ *ist eine kompakte Untergruppe.*
(ii) $\mathrm{N}_{k'/k}(k'^{\times}) \subseteq k^{\times}$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. (i) $\mathrm{N}_{k'/k} : k'^{\times} \to k^{\times}$ ist als Produkt von stetigen Abbildungen stetig. Da $\mathcal{U}(k') \subseteq k'^{\times}$ kompakt ist, gilt das gleiche für $\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k'))$.

(ii) Schreibe $k'^{\times} = \pi'^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{U}(k')$. Dann ist $\mathrm{N}_{k'/k}(k'^{\times}) = \mathrm{N}_{k'/k}(\pi')^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k')) = (\pi^f u)^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k'))$ für geeignete Primelemente π', π von k' bzw. k. Sei $(x_n)_n$ eine konvergente Folge mit $x_n \in \mathrm{N}_{k'/k}(k'^{\times})$ mit $x_n \to x \in k$. Da Bewertungen diskret sind, wird die Bewertung von x_n schließlich stabil, o.E. gilt also $x_n \in (\pi^f u)^l \times N_{k'/k}(\mathcal{U}(k'))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $l \in \mathbb{Z}$. Schreibe $x_n = (\pi^f u)^l y_n$. Dann konvergiert $(y_n)_n$ gegen $y := x/(\pi^f u)^l$ und mit (i) folgt $y \in \mathrm{N}_{k'/k}(U(k'))$, also die Behauptung. □

Vorlesung 4
Mai 5, 2026

Definition 1.35. Sei $k \subseteq F \subseteq \Omega$. Dann definiert man Normgruppen

(i) $\mathrm{N}(F/k) := \bigcap_{k \subseteq_f k' \subseteq F} \mathrm{N}_{k'/k}(k'^{\times}) \subseteq k^{\times}$,
(ii) $\mathrm{N}\mathcal{U}(F/k) := \bigcap_{k \subseteq_f k' \subseteq F} \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k')) \subseteq \mathcal{U}(k)$.

Aus dem obigen Lemma folgt sofort, dass $\mathrm{N}(F/k)$ abgeschlossen und $\mathrm{N}\mathcal{U}(F/k)$ (als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums) kompakt ist. Weiter ist $\mathrm{N}\mathcal{U}(F/k) = \mathrm{N}(F/k) \cap \mathcal{U}(k)$, und für einen Körperturm $k \subseteq F \subseteq F' \subseteq \Omega$ folgt $\mathrm{N}(F'/k) \subseteq \mathrm{N}(F/k)$ sowie $\mathrm{N}\mathcal{U}(F'/k) \subseteq \mathrm{N}\mathcal{U}(F/k)$.

Lemma 1.36. *Sei k'/k endlich und unverzweigt. Dann gilt:* $\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k')) = \mathcal{U}(k)$.

Beweis. Setze $\mathcal{U} := \mathcal{U}(k)$ und $\mathcal{U}' = \mathcal{U}(k')$. Wir wissen $\mathcal{U}/\mathcal{U}_1 \cong \kappa^{\times}$ und $\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1} \cong \kappa$ für $i \geq 1$, und ebenso für k' (vgl. die Erläuterungen nach Lemma 1.11). Betrachte die Diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U}'/\mathcal{U}'_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}_{k'/k}"] & \kappa'^{\times} \arrow[d, "\mathrm{N}_{\kappa'/\kappa}"] \\
\mathcal{U}/\mathcal{U}_1 \arrow[r] & \kappa^{\times}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{U}'_i/\mathcal{U}'_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{N}_{k'/k}"] & \kappa' \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{\kappa'/\kappa}"] \\
\mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1} \arrow[r] & \kappa
\end{tikzcd}
$$

Die Kommutativität des linken Diagramms ist klar, für das rechte sei $\pi = \pi_k$ ein Primelement in k. Da k'/k unverzweigt ist, ist π auch ein Primelement in k', sodass sich jedes Element in $\mathcal{U}'_i/\mathcal{U}'_{i+1}$ als $(1 + \pi^i \alpha)\mathcal{U}'_{i+1}$ mit $\alpha \in \mathcal{O}_{k'}$ darstellen lässt. Dann lassen sich die Bilder dieses Elements wie folgt berechnen:

$$
\begin{tikzcd}
(1+\pi^i\alpha)\mathcal{U}'_{i+1} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \pi^i\alpha + \mathfrak{p}_{k'}^{i+1} \arrow[r, mapsto] & \alpha + \mathfrak{p}_{k'} \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{N}_{k'/k}(1+\pi^i\alpha)\mathcal{U}_{i+1} \arrow[r, mapsto, "(*)"] & \pi^i \,\mathrm{Tr}_{k'/k}(\alpha) + \mathfrak{p}_k^{i+1} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Tr}_{k'/k}(\alpha) + \mathfrak{p}_k,
\end{tikzcd}
$$

wobei für $(*)$ die Rechnung $\mathrm{N}_{k'/k}(1+\pi^i\alpha) = \prod_\sigma(1+\pi^i\sigma(\alpha)) \equiv 1+\pi^i\sum_\sigma\sigma(\alpha) \mod \mathfrak{p}_k^{i+1}$ verwendet wurde. Nun sind $\mathrm{N}_{\kappa'/\kappa}$ und $\mathrm{Tr}_{\kappa'/\kappa}$ für endliche Körper surjektiv: Nach Hilbert's Satz 90 gilt $H^1(\mathrm{Gal}(\kappa'/\kappa), \kappa'^\times) = 1$, also $\kappa^\times / \mathrm{N}_{\kappa'/\kappa}(\kappa'^\times) = H^0(\mathrm{Gal}(\kappa'/\kappa), \kappa'^\times) = 1$ via Herbrand-quotienten. Analog für die Spur. Aus den kommutativen Diagrammen folgt daraus, dass auch $\mathrm{N}_{k'/k} : \mathcal{U}'_i/\mathcal{U}'_{i+1} \to \mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i+1}$ surjektiv ist, für alle $i \geq 0$.

Per Induktion zeigt man $\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')\mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ für alle $i \geq 1$. Für $i = 1$ ist das genau die Surjektivität im linken Diagramm. Gelte die Behauptung nun für $i-1$, dann folgt analog

$$\mathcal{U} = \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')\mathcal{U}_{i-1} = \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')\,\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}'_{i-1})\mathcal{U}_i = \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')\mathcal{U}_i.$$

Sei nun $\mathcal{U} \ni u = x_i u_i$ mit $x_i \in \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')$ und $u_i \in \mathcal{U}_i$. Es folgt $x_i = uu_i^{-1} \to u$ für $i \to \infty$. Da $\mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')$ abgeschlossen ist, folgt also auch $u \in \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}')$. □

Proposition 1.37. *Sei $k \subseteq F \subseteq \Omega$ und F/k unverzweigt. Dann gilt*

(i) $\mathrm{N}\,\mathcal{U}(F/k) = \mathcal{U}(k)$.
(ii) Falls $[F:k] = \infty$, so gilt $\mathrm{N}(F/k) = \mathcal{U}(k)$.

Insbesondere ist $\mathrm{N}(k_{ur}/k) = \mathrm{N}\,\mathcal{U}(k_{ur}/k) = \mathcal{U}(k)$.

Beweis. (i) $\mathrm{N}\,\mathcal{U}(F/k) = \bigcap_{k\subseteq_f k'\subseteq F}\mathrm{N}\,\mathcal{U}(k'/k) = \bigcap_{k\subseteq_f k'\subseteq F}\mathcal{U}(k) = \mathcal{U}(k)$ nach dem Lemma.

(ii) Sei $k \subseteq_f k' \subseteq F$, also $k' = k_{\mathrm{ur}}^n$ falls $[k':k] = n$. Es folgt $\mathrm{N}_{k'/k}(k'^\times) = \pi_k^{n\mathbb{Z}} \times \mathcal{U}(k)$, also $\mathrm{N}(F/k) = \bigcap_n \pi_k^{n\mathbb{Z}} \times \mathcal{U}(k) = \mathcal{U}(k)$. □

Proposition 1.38. *Sei $k \subseteq F \subseteq \Omega$. Dann ist F/k voll verzweigt genau dann, wenn $\mathrm{N}(F/k)$ ein Primelement von k enthält.*

Beweis. Nimm zuerst an, dass F/k eine unverzweigte endliche Erweiterung $k' = k_{\mathrm{ur}}^n/k$ enthält. Sei π ein Primelement von k. Dann folgt direkt $\mathrm{N}(F/k) \subseteq \mathrm{N}_{k'/k}(k'^\times) = \pi^{n\mathbb{Z}} \times \mathcal{U}(k)$, was kein Primelement entält.

Sei jetzt F/k voll verzweigt. Für $k \subseteq_f k' \subseteq F$ schreibe $S(k') = \{x \in \mathrm{N}(k'/k) \mid \nu(x) = 1\}$ für die Menge der Primelemente in $\mathrm{N}(k'/k)$. Sei π' ein Primelement von k', dann ist $S(k') = \mathrm{N}_{k'/k}(\pi'\mathcal{U}(k'))$: "$\supseteq$" ist klar, da k'/k voll verzweigt ist, sodass $\mathrm{N}_{k'/k}(\pi')$ prim ist. Umgekehrt sei $x \in S(k')$. Dann ist $x = \mathrm{N}_{k'/k}(\pi')u$ mit $u \in \mathcal{U}(k) \cap \mathrm{N}_{k'/k}(k'^\times) = \mathrm{N}_{k'/k}(\mathcal{U}(k'))$. Also ist $S(k')$ kompakt und nicht leer. Ferner seien $k \subseteq_f k'_1, k'_2 \subseteq F$. Dann impliziert die Transitivität der Norm $S(k'_1k'_2) \subseteq S(k'_1) \cap S(k'_2)$, also $S(\prod_{i=1}^t k'_i) = \bigcap_{i=1}^t S(k_i)'$ für $k \subseteq_f k'_i \subseteq F$, $i = 1, \dots, t$.

Angenommen es wäre $\bigcap_{k\subseteq_f k'\subseteq F} S(k') = \emptyset$. Dann ist $S(k) = \bigcup_{k'}(S(k) \setminus S(k'))$. Wegen $S(k)\setminus S(k') = S(k)\cap(k^\times\setminus S(k'))$ und $S(k')$ kompakt, also abgeschlossen folgt, dass $S(k)\setminus S(k')$ offen in $S(k)$ ist. Da $S(k)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $S(k) = \bigcup_{i=1}^t(S(k)\setminus S(k'_i))$, also $\emptyset = \bigcap_i S(k'_i) \supseteq S(\prod_i k'_i) \neq \emptyset$. □

2 Formale Potenzreihen

Sei R ein kommutativer Ring und

$$S = R[\![X_1, \ldots, X_n]\!] = \left\{ \sum_{i \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_i X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mid a_i \in R \right\}.$$

Definition 2.1. Für $f, g \in S$ schreiben wir $f \equiv g \pmod{\deg d}$, wenn $f - g$ keine Monome vom Grad kleiner d enthält.

Beispiel 2.2. (i) Sei $n = 1$. $f \equiv 0 \pmod{\deg d}$ ist äquivalent zu $f \in X^d R[\![X]\!]$.

(ii) Sei $n = 2$. Dann besagt $f \equiv X + Y \pmod{\deg 2}$, dass $f(X, Y) = X + Y +$Terme vom Grad ≥ 2.

Sei $f \in S$ und $g_1, \ldots, g_n \in R[\![Y_1, \ldots, Y_m]\!]$ mit $g_i \equiv 0 \pmod{\deg 1}$. Dann ist

$$f \circ (g_1, \ldots, g_m) := f(g_1(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, g_n(Y_1, \ldots, Y_m)) \in R[\![Y_1, \ldots, Y_m]\!]$$

wohldefiniert. Für $n = 1$, also $S = R[\![x]\!]$ mit maximalem Ideal $M = XS$, und $f, g \in M$ sind $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert, d.h. $(M, \circ)$ ist ein Monoid mit neutralem Element X.

Übung 2.3. $f(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n \in M$ ist invertierbar genau dann, wenn $a_1 \in R^\times$.

Beispiel 2.4. Seien $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}[\![X]\!]$ und $g(Y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m Y^m \in \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}[\![Y]\!]$ mit $b_0 \in \mathfrak{p}_{\overline{\Omega}}$. Dann ist

$$f(g(Y)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m Y^m \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Y^k$$

mit $c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_0^n \in \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}$ und $c_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} b_0^{n-1} b_1 \in \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}$, da $\overline{\Omega}$ vollständig ist.

Literatur

[Bos20] Bosch, Siegfried. *Algebra*. 9. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2020.

[Iwa86] Iwasawa, Kenkichi. *Local Class Field Theory*. Oxford, New York: Oxford University Press, 1986.

[Neu06] Neukirch, Jürgen. *Algebraic Number Theory*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006.