Protokoll zur Vorlesung Kommutative Algebra

W. Bley

30. April 2025

1 Basissatz und Nullstellensatz

1.1 Sehr Grundlegendes

Grundsätzlich sind in dieser Vorlesung alle Ringe kommutativ und unitär, d.h. es gibt ein neutrales Element 1 bezüglich der Multiplikation. Wir erlauben aber den Nullring (Bezeichnung: 0). Hier ist die 1 gleich der 0.
Entsprechend ist ein Ringhomomorphismus $f\colon R \longrightarrow S$ stets ein Homomorphismus von unitären kommutativen Ringen. D.h. neben den üblichen Bedingungen

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b) \text{ für alle } a, b \in R,$$

verlangen wir auch $f(1_R) = 1_S$.

1.2 Der Hilbertsche Basissatz

Definition 1.2.1 Ein Ring R heißt noethersch, falls jedes Ideal endlich erzeugt ist.

Definition 1.2.2 Ein Ring R genügt der Bedingung für aufsteigende Ketten (von Idealen), wenn jede solche Kette stationär wird, d.h. zu jeder Kette

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$$

von Idealen in R gibt es eine natürliche Zahl i_0, so dass für alle $i \geq i_0$ die Gleichheit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i_0}$ gilt.

Auch diese Bedingung charakterisiert noethersche Ringe. Es gilt:

Satz 1.2.3 *Ein Ring R ist genau dann noethersch, wenn er der Bedingung für aufsteigende Ketten genügt.*

Satz 1.2.4 *(Hilbertscher Basissatz) Falls der Ring R noethersch ist, so ist auch der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

Folgerung 1.2.5 *a) Sei R noethersch. Dann ist auch der Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ in den Variablen $X_1, \dots, X_n$ noethersch.*
b) Homomorphe Bilder von noetherschen Ringen sind noethersch.
c) Sei R noethersch und A eine endliche erzeugte R-Algebra. Dann ist A noethersch.

Wir wollen kurz noch den Begriff einer R-Algebra erläutern. Seien dazu R und A zwei Ringe und $f\colon R \longrightarrow A$ ein Ringhomomorphismus. Für $r \in R$ und $a \in A$ setzen wir $ra := f(r)a$. Damit wird A zu einem R-Modul. Einen Ring A zusammen mit einem Ringhomomorphismus f nennt man R-Algebra. Falls $R = k$ ein Körper ist (und $A \neq 0$), so ist f automatisch injektiv und wir können oE k als Teilmenge von A betrachten. Eine k-Algebra ist dann ein k-Vektorraum, der zusätzlich ein Ring ist. Jeder Ring B ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra mittels der Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow B, n \mapsto n \cdot 1$.

Seien A_1, A_2 zwei R-Algebren bezüglich der Homomorphismen $f_i\colon R \longrightarrow A_i$, $i = 1, 2$. Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon A_1 \longrightarrow A_2$ ist ein Homomorphismus von R-Algebren, falls für alle $r \in R$ gilt: $\varphi(f_1(r)) = f_2(r)$. Dies ist äquivalent zur Bedingung:

$$\varphi(ra) = r\varphi(a) \text{ für alle } r \in R, a \in A_1.$$

1.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Es sei stets k ein Körper.
Für eine Teilmenge $S \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ heißt

$$Z(S) := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

die affine algebraische Menge zu S. $Z(S)$ ist also die Teilmenge des k^n der gemeinsamen Nullstellen der Polynome in S. Offensichtlich ist $Z(S) = Z((S))$. oE werden wir daher im folgenden davon ausgehen, dass $S = \mathfrak{a}$ ein Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Remarks 1.3.1 (a) Z ist inklusionsumkehrend, d.h $S_1 \subseteq S_2$ impliziert $Z(S_2) \subseteq Z(S_1)$.
(b) Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gilt: $Z(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$, $Z(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b})$.

Die Menge der affinen algebraischen Teilmengen des k^n bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf dem k^n, der sogenannten Zariski-Topologie (siehe Übungsblatt 1). Wir schreiben oft $k^n = \mathbb{A}^n(k)$ oder auch $\mathbb{A}^n$, falls k als Grundkörper fixiert ist.
Zu $X \subseteq k^n$ definieren wir das Ideal

$$I(X) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(a) = 0 \text{ für alle } a = (a_1, \ldots, a_n) \in X\}.$$

Definition 1.3.2 Sei $X = Z(\mathfrak{a})$ eine algebraische Menge. Dann heißt

$$A(X) := k[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$$

Koordinatenring oder Ring der regulären Funktionen auf X.

Definition 1.3.3 Ein Ring R heißt reduziert, falls es in R keine nilpotenten Elemente ungleich 0 gibt.

Dieser Begriff steht in engem Zusammenhang zum Begriff des Radikalideals.

Definition 1.3.4 (a) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann nennt man

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n \in \mathfrak{a}\}$$

das Radikal von $\mathfrak{a}$.
(b) Falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt, so nennt man $\mathfrak{a}$ ein Radikalideal.

Man zeigt leicht, dass $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Ideal ist und es gilt trivialerweise $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Lemma 1.3.5 *Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:*

$$\mathfrak{a} \text{ ist ein Radikalideal} \iff R/\mathfrak{a} \text{ ist reduziert.}$$

Insbesondere sind also Primideale radikal.

Da die Verschwindungsideale $I(X)$ stets radikal sind, sind die Koordinatenringe $A(X)$ stets reduziert.

Satz 1.3.6 *Sei $X = Z(\mathfrak{a})$ eine affine algebraische Menge. Dann gilt: $Z(I(X)) = X$.*

Man kann ebenfalls leicht zeigen, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von $k[X_1, \ldots, X_n]$ die Inklusion $\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$ gilt. Die andere Inklusion ist für beliebige Körper im Allgemeinen falsch. Es gilt jedoch:

Satz 1.3.7 *(Hilbertscher Nullstellensatz) Sei k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal. Dann gilt:*

$$I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

Damit sind die Zuordnungen $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ und $X \mapsto I(X)$ zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen zwischen der Menge der Radikalideal von $k[X_1, \ldots, X_n]$ und der Menge der affinen algebraischen Teilmengen des k^n.

Folgerung 1.3.8 *Sei k algebraisch abgeschlossen und $f_1, \ldots, f_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) Das System $f_1(X_1, \ldots, X_n) = \ldots = f_m(X_1, \ldots, X_n) = 0$ hat keine Lösung.
(b) $(f_1, \ldots, f_m) = k[X_1, \ldots, X_n]$.
(c) Es gibt $p_1, \ldots, p_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $1 = \sum_{i=1}^m p_i f_i$.

Folgerung 1.3.9 *Sei k algebraisch abgeschlossen und A eine k-Algebra. Dann ist A genau dann der Koordinatenring für eine algebraische Menge, wenn A endlich erzeugt und reduziert ist.*

Lemma 1.3.10 *Sei k ein Körper und $a_1, \ldots, a_n \in k$. Dann ist $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ ein maximales Ideal.*

Falls X eine algebraische Menge ist und $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, so gilt

$$I(X) \subseteq I(p) = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n).$$

Folgerung 1.3.11 *Sei k algebraisch abgeschlossen und $X \in k^n$ eine algebraische Menge. Dann sind die maximalen Ideale von $A(X)$ genau die Ideale der Form*

$$\mathfrak{m}_p := (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)/I(X)$$

mit $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$.

Für eine algebraische Menge $X \subseteq k^n$, k algebraisch abgeschlossen, vermittelt also die Abbildung $p \mapsto \mathfrak{m}_p$ eine Bijektion zwischen den Punkten $p \in X$ und den maximalen Idealen des Koordinatenrings $A(X)$.

1.4 Alternative Beschreibung des Radikals eines Ideals

Abschließend in diesem Abschnitt geben wir eine alternative Beschreibung des Radikals eines Ideals $\mathfrak{a}$. Dazu brauchen wir zunächst die folgenden Vorbereitungen. Es sei stets R ein beliebiger kommutativer Ring mit 1.

Definition 1.4.1 Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt multiplikativ oder multiplikativ abgeschlossen, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{array}{ll} (i) & u, v \in S \implies uv \in S. \\ (ii) & 1 \in S. \end{array}$$

Lemma 1.4.2 *Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Menge und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal mit $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.*

Hiermit beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.4.3 *Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt:*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p},$$

wobei der Schnitt über alle Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ zu erstrecken ist.

2 Lokalisierungen

2.1 Brüche

Definition 2.1.1 Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Sei $U \subseteq R$ eine multiplikative Menge. Die Lokalisierung von M nach U, in Zeichen $U^{-1}M$ oder $M[U^{-1}]$, ist die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren $(m, u) \in M \times U$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$(m, u) \sim (m', u') :\Longleftrightarrow \exists v \in U : v(u'm - um') = 0.$$

Die Äquivalenzklasse von (m, u) bezeichnen wir mit $\frac{m}{u}$. Die Menge $U^{-1}M$ der Äquivalenzklassen wird vermöge

$$\frac{m}{u} + \frac{m'}{u'} := \frac{u'm + um'}{uu'}, \quad r\frac{m}{u} := \frac{rm}{u}$$

zu einem R-Modul.

Im Fall $M = R$ wird die Lokalisierung $U^{-1}R$ durch

$$\frac{r}{u} \cdot \frac{r_1}{u_1} := \frac{rr_1}{uu_1}$$

zu einem kommutativen Ring mit 1.