Prof. Dr. Werner Bley Sommersemester 2024

12. Juni 2024

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Definition Sei A eine abelsche Gruppe und $f, g\colon A \longrightarrow A$ Endomorphismen von A mit der Eigenschaft $f \circ g = g \circ f = 0$. Dann definiert man

$$q_{f,g}(A) := \frac{(\ker(f) : \operatorname{im}(g))}{(\ker(g) : \operatorname{im}(f))},$$

falls beide Indizes endlich sind.

Sei nun $G = \langle \sigma \rangle$ eine zyklische Gruppe, A ein G-Modul und

$$\begin{array}{rcll} D & : & A \longrightarrow A, & a \mapsto (\sigma - 1)a, \\ N & : & A \longrightarrow A, & a \mapsto N_G a. \end{array}$$

Zeigen Sie: $h(A) = q_{D,N}(A)$.

Aufgabe 2

Sei $f = 0$ und $g = n$ die Multiplikation mit der natürlichen Zahl n. Sei G zyklisch von Ordnung n und A ein trivialer G-Modul. Zeigen Sie: $h(A) = q_{0,n}(A)$.

Bemerkung: Falls $|G| = p$, so ist $q_{0,p}$ gerade die Funktion φ aus der Vorlesung.

Aufgabe 3

Sei $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

a) Wenn zwei der Quotienten $q_{0,n}(A)$, $q_{0,n}(B)$ und $q_{0,n}(C)$ existieren, so auch der dritte.

b) $q_{0,n}(B) = q_{0,n}(A) q_{0,n}(C)$.
Hinweis: Nutzen Sie hierzu das Schlangenlemma.

Aufgabe 4

Seien f, g zwei miteinander vertauschbare Endomorphismen der abelschen Gruppe A. Dann gilt:

$$q_{0,fg}(A) = q_{0,f}(A) q_{0,g}(A),$$

was wieder so zu verstehen ist, dass alle drei Quotienten definiert sind, wenn nur zwei unter ihnen definiert sind. *Hinweis: Betrachte Sie das kommutative Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & g(A) \cap \ker(f) \arrow[r] \arrow[d] & g(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & fg(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(f) \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & f(A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Aufgabe 5
Sei $G = \langle \sigma \rangle$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung p. Zeigen Sie: Ist $q_{0,p}(A)$ definiert, so auch $q_{0,p}(A^G)$ und es gilt:

$$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p / q_{0,p}(A).$$

Hinweise: Die Aufgaben sind vollständig in Neukirchs Buch behandelt. Die Aufgaben 1-4 sollten mit den Hinweisen ohne zu Hilfenahme des Buches machbar sein. Die fünfte Aufgabe wird ausführlich in der Übung besprochen.