Prof. Dr. Werner Bley Sommersemester 2024
29. Mai 2024

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$. Sei A ein G-Modul. Wir definieren

$$\mathrm{Res}_0 \colon H^0(G,A) \longrightarrow H^0(U,A), \quad a + N_G A \mapsto a + N_U A.$$

a) Zeige, dass Res_0 wohldefiniert ist.

b) Zeige: Ist

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine exakte Sequenz von G-Moduln, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^0(G,C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_0"] & H^1(G,A) \arrow[d, "\mathrm{Res}_1"] \\ H^0(U,C) \arrow[r, "\delta"] & H^1(U,A) \end{tikzcd}$$

c) (Optional) Studieren Sie Definition (4.9) im Buch “Klassenkörpertheorie” von Neukirch. Falls diese Aufgabe in der Übung behandelt werden soll, so ist ein Vortragender gesucht.

Aufgabe 2
Sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$. Zeigen Sie: Die durch

$$\mathrm{Kor}_{-2} : H^{-2}(U,\mathbb{Z}) \to H^{-2}(G,\mathbb{Z})$$

induzierte Abbildung

$$\varphi : U^{ab} \to G^{ab}$$

ist der kanonische Homomorphismus, den man durch $gU' \mapsto gG'$ erhält, wobei U' bzw. G' die Kommutatoruntergruppe von U bzw. G ist.

Aufgabe 3
Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G, $U \leq G$ und $F := L^U$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Kor}_0 : H^0(U, L^\times) \to H^0(G, L^\times) \text{ bzw. } \mathrm{Kor}_0 : H^0(U,L) \to H^0(G,L)$$

durch die Norm $\mathrm{N}_{F/K}$ bzw. die Spur $\mathrm{Tr}_{F/K}$ induziert werden.

Aufgabe 4
Sei $f \colon G' \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus und A ein G-Modul. Durch

$$\sigma' \cdot a := f(\sigma')a, \quad \sigma' \in G', a \in A,$$

wird A zu einem G'-Modul, den wir mit f^*A bezeichnen. Sei A' ein G'-Modul und $g \colon A \longrightarrow A'$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Wir nennen f und g kompatibel, falls

$g(f(\sigma')a) = \sigma' g(a)$ für alle $a \in A$ und alle $\sigma' \in G'$ gilt. Mit anderen Worten: g ist ein G'-Homomorphismus $f^*A \longrightarrow A'$. Definieren Sie für ein kompatibles Paar (f, g) und $q \geq 0$ einen Homomorphismus

$$(f, g)_q^* \colon H^q(G, A) \longrightarrow H^q(G', A').$$

Betrachten Sie die folgenden Beispiele:

- Sei $H \leq G$, f die Inklusion und $A = A'$. Dann erhalten wir die Restriktion.
- Sei H ein Normalteiler, $f \colon G \longrightarrow G/H$ kanonisch und $g \colon A^H \longrightarrow A$ die Inklusion. Dann erhalten wir die Inflation.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.