LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
15. Mai 2024

Sommersemester 2024

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von G-Moduln.

a) Zeigen Sie, dass die induzierte Sequenz $0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G$ exakt ist.

b) Sei δ_G das Kompositum $C^G \longrightarrow C^G/N_G C = H^0(G,C) \xrightarrow{\delta_0} H^1(G,A)$. Zeigen Sie, dass

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta_G} H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G,A) \longrightarrow \dots$$

exakt ist.

Aufgabe 2

Sei $L/\mathbb{Q}$ eine quadratische Erweiterung mit Galoisgruppe G, μ_L die Gruppe der Einheitswurzel in $L^\times$ und I_L die Gruppe der gebrochenen Ideale. Berechnen Sie für $q = -1, 0$ die Kohomologiegruppen $H^q(G, \mathcal{O}_L), H^q(G, \mathcal{O}_L^\times), H^q(G, \mu_L)$ und $H^q(G, I_L)$.

Aufgabe 3

Sei L/K eine endliche zyklische Galoiserweiterung mit Gruppe G. Zeige: $H^{-1}(G, L^\times) = 0$.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper der Charakteristik p und m eine natürliche zu p teilerfremde Zahl. Sei $0 \neq a \in K$, so dass $f(x) = x^m - a$ irreduzibel ist. Sei L der Zerfällungskörper von f und $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige:

a) Die m-ten Einheitswurzeln μ_m sind in L enthalten.

b) Durch $x\colon G \longrightarrow \mu_m, \sigma \mapsto \sigma(\omega)/\omega$ ist ein Element in $H^1(G, \mu_m)$ gegeben. Hierbei wählen wir $\omega \in L$ mit $\omega^m = a$. Zeige insbesondere, dass x unabhängig von der Wahl von ω ist.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.