



Prof. Dr. Werner Bley  
7. Mai 2024

Sommersemester 2024

## Algebraische Zahlentheorie II Übungsblatt 4

### Aufgabe 1

Sei  $p$  eine Primzahl und  $k$  ein imaginär-quadratischer Körper. Sei  $H = k(1)$  der Hilbertsche Klassenkörper. Zeigen Sie, dass es unendlich viele zyklische Erweiterungen  $K/H$  vom Grad  $p$  gibt, so dass  $K/k$  abelsch ist und  $f_{K/k} = \mathfrak{q}$  gilt mit einem zerlegten Primideal  $\mathfrak{q}$  von  $\mathcal{O}_k$ .

### Aufgabe 2

Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe und  $I_G$  das Augmentationsideal.

a) Zeige:  $I_G/I_G^2 \simeq G$ .

b) Zeige allgemeiner für eine beliebige endliche Gruppe:  $I_G/I_G^2 \simeq G^{ab}$ .

### Aufgabe 3

Seien  $A, B$  zwei endlich erzeugte  $G$ -Moduln und  $A$  habe triviale  $G$ -Wirkung. Zeige oder widerlege:

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G = A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G.$$

### Aufgabe 4

Beweisen Sie Übung 2.13 in der Vorlesungsmitschrift von Pascal Stucky.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.