



Prof. Dr. Werner Bley  
22. April 2020

Sommersemester 2020

## Algebraische Zahlentheorie II Übungsblatt 1

Für die Definitionen die man zur Bearbeitung dieses Übungsblattes braucht, verweisen wir auf die Vorlesung.

### Aufgabe 1

Zeigen Sie die Exaktheit der Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times & \longrightarrow & \mathcal{O}_k^\times & \xrightarrow{\rho} & (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times & \longrightarrow & cl_m & \longrightarrow & cl_k & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & u & \longmapsto & (\bar{u}, (\text{sgn}(\sigma(u)))_{\sigma \in S_\infty}) & & \alpha \mathcal{P}_m & \longmapsto & \alpha \mathcal{P}_k & & \\
 & & & & & & & & \rho(\alpha) & \longmapsto & (\alpha) \mathcal{P}_m & & 
 \end{array}$$

### Aufgabe 2

Zeigen Sie:

$$|cl_m| = |cl_k| \cdot \frac{|(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times|}{|[\mathcal{O}_k^\times : \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times]|}.$$

Insbesondere gilt also  $|cl_m| < \infty$ .

### Aufgabe 3

Sei  $k$  ein reell-quadratischer Zahlkörper und seien  $\infty_1, \infty_2$  die unendlichen Stellen. Sei  $m = \infty_1 \infty_2$  und  $\varepsilon$  eine Fundamenteleinheit. Zeigen Sie:

$$|cl_m| = \begin{cases} h_k, & \text{falls } N_{k/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1, \\ 2h_k, & \text{falls } N_{k/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = +1. \end{cases}$$

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es eventuell auch Lösungsvorschläge online geben.