



Prof. Dr. Werner Bley  
26. Juni 2024

Sommersemester 2024

## Algebraische Zahlentheorie II Übungsblatt 10

### Aufgabe 1

Sei  $L/K$  eine Erweiterung von Zahlkörpern. Seien  $I_K$  und  $I_L$  die Idelgruppen. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung  $I_K \rightarrow I_L$  einen injektiven Homomorphismus  $C_K \rightarrow C_L$  zwischen den Idelklassengruppen induziert.

### Aufgabe 2

Sei  $L/K/\mathbb{Q}_p$  ein Körperturm mit  $[L : \mathbb{Q}_p] < \infty$ . Zeigen Sie, dass die Normengruppe  $N_{L/K}(L^\times)$  eine offene Untergruppe von  $K^\times$  von endlichem Index ist.

### Aufgabe 3

Sei  $G = \widehat{\mathbb{Z}}$  und  $G_n = n\widehat{\mathbb{Z}}$ . Dann haben wir bereits gezeigt:  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/n\widehat{\mathbb{Z}}$

- $G$  wird zur topologischen Gruppe, indem wir die  $G_n$  als Basis der offenen Umgebungen der 0 nehmen. Zeigen Sie:  $\mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$  ist eine dichte Untergruppe.
- Sei  $A$  ein  $G$ -Modul. Der kanonische Erzeuger  $1 \in \mathbb{Z}$  definiert einen Automorphismus  $F$  von  $A$ . Zeigen Sie: Falls  $A$  ein stetiger  $G$ -Modul ist, so gibt es zu jedem  $a \in A$  eine natürliche Zahl  $n$ , so dass  $F^n a = a$  gilt.
- Sei  $A' := \{a \in A \mid \exists n > 0 \text{ so dass } (1 + F + \dots + F^{n-1})a = 0\}$ . Definiere

$$H^q(G, A) := \varinjlim H^q(G/G_n, A^{G_n})$$

für  $q \geq 1$  und zeigen Sie  $H^1(G, A) \simeq A'/(F-1)A$ .

### Aufgabe 4

Beweisen Sie die Teile (1) und (2) im Satz 3.33 in der Vorlesungsmitschrift von Pascal Stucky.