Unabhängigkeit ℓ-adischer Galois-Darstellungen.
(Gemeinsam mit Gebhard Böckle und Wojciech Gajda)

Sei K ein Körper und $\mathbb{L}$ die Menge aller Primzahlen. Sei X/K ein separiertes algebraisches Schema und $i \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für jedes $\ell \in \mathbb{L}$ die Darstellung

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

der absoluten Galoisgruppe von K auf der étalen Kohomologiegruppe $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$. Sei $\rho : \mathrm{Gal}(K) \to \prod_{\ell \in \mathbb{L}} \mathrm{im}(\rho_\ell)$ die kanonische Abbildung. Man nennt eine solche Familie $(\rho_\ell)_{\ell \in \mathbb{L}}$ von Darstellungen *fast unabhängig*, wenn eine endliche separable Erweiterung E/K derart existiert, dass $\rho(\mathrm{Gal}(E)) = \prod_{\ell \in \mathbb{L}} \rho_\ell(\mathrm{Gal}(E))$ gilt.

Serre hat 2010 bewiesen: *Wenn K ein Zahlkörper ist, dann ist die Familie $(\rho_\ell)_{\ell \in \mathbb{L}}$ fast unabhängig.*

Dies ist eine wichtige Information hinsichtlich der etwas technisch zu formulierenden *Vermutung über die adelische Offenheit*, die ich im Vortrag kurz erklären werde, und auch in Hinblick auf andere Anwendungen.

Zwei gemeinsame Arbeiten mit Böckle und Gajda und eine Arbeit von Cadoret und Tamagawa beschäftigen sich mit diversen Funktionenkörperanaloga dieses Satzes. Unter anderem konnten wir eine Frage von Serre und Illusie zu dem Thema positiv beantworten.