Prof. Dr.Werner Bley
Sandra Weigl

03.05.2011

1. Übungsblatt Modulformen

Aufgabe 1

Zeigen Sie: $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T\rangle$, wobei $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Anleitung: Sei Γ die von S und T erzeugte Untergruppe. Sei $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Benutzen Sie die Identität

$$\alpha T^n = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & nc + d \end{pmatrix}$$

um zu zeigen, dass es für $c \neq 0$ stets eine Matrix der Form $\alpha\gamma$ mit $\gamma \in \Gamma$ gibt, für deren untere Zeile (c, d') gilt: $|d'| \leq |c|/2$.
Folgern Sie aus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

dass man diesen Prozess iterieren kann, um eine Matrix $\alpha\gamma$ mit $\gamma \in \Gamma$ zu erhalten mit unterer Zeile $(0, *)$. Zeigen Sie, dass die untere Zeile tatsächlich von der Form $(0, \pm 1)$ sein muss. Folgern Sie hieraus die Behauptung.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: f ist genau dann eine schwache Modulform vom Gewicht k, wenn

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \text{ und } f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$$

für alle $\tau \in \mathcal{H}$ gilt.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\substack{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 \\ (n,m)\neq(0,0)}} \frac{1}{(n^2 + m^2)^l}$$

für $l \geq 2$, $l \in \mathbb{Z}$, absolut konvergiert.

Aufgabe 4

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls:
a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13} dx$.
b) $\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2} dx, a > 0$.

Abgabe: In der nächsten Vorlesung ?????????????