Prof. W. Bley 22.02.2006

Klausur zur Linearen Algebra I (WS 2005/2006)

Name	Vorname	Matrikelnummer

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	$\sum$

Thomas

Aufgabe 1 (3+1+2 Punkte)
a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 2 & i & 1 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

b) Seien V, W zwei $\mathbb{C}$-Vektorräume mit $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis von V und w_1, w_2, w_3 eine Basis von W.
Die lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sei gegeben durch

$$f(v_1) = iw_1 + 2w_2 + w_3, f(v_2) = iw_2, f(v_3) = 2w_1 + w_2 + iw_3.$$

Zeigen Sie: f ist ein Isomorphismus.
c) Sei $g : W \longrightarrow V$ die Umkehrabbildung zu f. Geben Sie $g(w_i), i = 1, 2, 3,$ an.

Ruben

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $K = \mathbf{F}_3$ der Körper der Reste modulo 3. Lösen Sie in Abhängigkeit von $c \in K$ das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & + & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & cx_4 & = & 2 \end{array}$$

Marouen

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)
Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq 4\}$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und Grad kleiner gleich 4. Sei $D : V \longrightarrow V, D(p) = p''$, wobei p'' die zweite Ableitung des Polynoms p bezeichnet.
a) Zeigen Sie, daß D eine lineare Abbildung ist.
b) Geben Sie die Koordinatenmatrix von D bezüglich der Basis

$$v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2, v_4 = X^3, v_5 = X^4$$

von V an.
c) Bestimmen Sie Kern und Bild von D.

Wenn 5

Aufgabe 4 (2+2+2+2+2 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
a) Eine lineare Abbildung bildet linear abhängige Mengen von Vektoren wieder auf linear abhängige Mengen von Vektoren ab.
b) Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Es gelte $\dim(V) > \dim(W)$. Dann ist f nicht injektiv.
c) Sei V ein beliebiger Vektorraum (es wird also nicht vorausgesetzt, daß V von endlicher Dimension ist) und $f : V \longrightarrow V$ ein injektiver Endomorphismus. Dann ist f surjektiv.
d) Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Dann gibt es ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbf{F}_p$ mit $p-1$ Lösungen.
e) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ zwei Unterräume mit $\dim(U) = 3, \dim(V) = 2$. Dann gilt $\dim(U \cap V) \geq 1$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Matrix $A \in M_3(\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist. Berechnen Sie dazu eine Basis aus Eigenvektoren und geben Sie eine Übergangsmatrix $S \in Gl_3(\mathbb{Q})$ an, so daß $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Oli

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt trigonalisierbar, falls es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt, so daß die zugehörige Koordinatenmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist.
a) Zeigen Sie: Falls f trigonalisierbar ist, so zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]$ vollständig in Linearfaktoren.
b) Sei nun $\dim(V) = 2$. Zeigen Sie dann auch die Umkehrung: Wenn das charakteristische Polynom $\chi_f \in K[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so ist f trigonalisierbar.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix aus $M_4(\mathbb{Q})$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Viel Erfolg!!!