Vorlesung 7

8.6.2021

Anmeldung zur Prüfung per E-Mail an

bley@math.lmu.de

mit Name, Matrikelnummer, Studiengang.

Wiederholung

Rechenbasis: $0 \le x < 2^n$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i \quad , \quad x_i \in \{0,1\}$$

$$\mathcal{H}^{\otimes n} \ni |x\rangle^n = |x\rangle = |x_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle = |x_{n-1} \dots x_0\rangle$$

Es gilt: $\{ |x\rangle^n : 0 \le x < 2^n \}$ ist eine ON-Basis

Bell-Basis: $n = 2$

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle \pm |11\rangle \right)$$

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle \pm |10\rangle \right)$$

Ebenfalls eine ON-Basis des $\mathcal{H}^{\otimes 2}$.

Sei $H^{AB} = H^A \otimes H^B$. Sei

$$\rho : H^{AB} \to H^{AB}$$

ein Dichteoperator. Sei

$$\mathrm{Tr}^B(\rho) : H^A \to H^A$$

die <u>Teilspur</u>. Dann ist $\mathrm{Tr}^B(\rho)$ ein Dichteoperator und beschreibt den Zustand, wenn man nur H^A beobachtet.

<u>Definition der Teilspur:</u> Für $v_1, v_2 \in H^A$, $w_1, w_2 \in H^B$

sei
$$|v_1\rangle\langle v_2| \otimes |w_1\rangle\langle w_2| : H^A \otimes H^B \to H^A \otimes H^B$$

Dann ist
$$\mathrm{Tr}^B\big(|v_1\rangle\langle v_2| \otimes |w_1\rangle\langle w_2|\big) : H^A \to H^A$$

gegeben durch
$$|v_1\rangle\langle v_2| \underbrace{\mathrm{tr}\big(|w_1\rangle\langle w_2|\big)}_{=\langle w_2|w_1\rangle^B \in \mathbb{C}}$$

Sei $\rho : H^A \otimes H^B \longrightarrow H^A \otimes H^B$ ein Dichteoperator und $\{e_a\}$ und $\{f_b\}$ ON-Basen. Sei

$$\rho = \sum_{a_1, b_1, a_2, b_2} \rho_{a_1 b_1, a_2 b_2} \underbrace{|e_{a_1} \otimes f_{b_1}\rangle\langle e_{a_2} \otimes f_{b_2}|}_{=|e_{a_1}\rangle\langle e_{a_2}| \otimes |f_{b_1}\rangle\langle f_{b_2}|}$$

Dann gilt:

$$\underline{\underline{\rho^A}} = \mathrm{Tr}^B(\rho)$$

$$= \sum_{a_1, b_1, a_2, b_2} \rho_{a_1 b_1, a_2 b_2} \, |e_{a_1}\rangle\langle e_{a_2}| \, \langle f_{b_2} | f_1 \rangle^B$$

$$= \underline{\underline{\sum_{a_1, a_2} \left(\sum_b \rho_{a_1 b, a_2 b} \right) |e_{a_1}\rangle\langle a_2|}}$$

Verschränkung

Definition: Ein reiner Zustand

$$|\Psi\rangle \in H^A \otimes H^B$$

heißt separabel, falls es Vektoren $|\varphi\rangle \in H^A$, $|\psi\rangle \in H^B$ gibt, so daß

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle .$$

Andernfalls heißt Ψ verschränkt.

Satz: Ψ separabel $\Longleftrightarrow$ $\rho^A(\Psi)$ oder $\rho^B(\Psi)$ ist rein.

Beweis:

„$\Longrightarrow$" Sei $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$.

Es gilt: $1 = \|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$

$$= \left(\langle \varphi | \varphi \rangle^A \langle \psi | \psi \rangle^B \right)^{1/2} = \|\varphi\| \, \|\psi\| .$$

Setze $|e_0\rangle := \dfrac{|\varphi\rangle}{\|\varphi\|}$, $|f_0\rangle := \dfrac{|\psi\rangle}{\|\psi\|}$ und

ergänze zu ON - Basen

$e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$

$f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \big(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle\big)\big(\langle\varphi| \otimes \langle\psi|\big)$$

hat bez. $\{e_a \otimes f_b\}$ die folgende Matrix

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

denn: $\big(\langle\varphi| \otimes \langle\psi|\big)\big(|e_0\rangle \otimes |f_0\rangle\big)$

$$= \left\langle \varphi \,\middle|\, \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right\rangle \left\langle \psi \,\middle|\, \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\rangle = \|\varphi\| \, \|\psi\|$$

und $\quad \|\varphi\| \, \|\psi\| \big(|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle\big)$

$$= \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2 \, |e_0\rangle \otimes |f_0\rangle = |e_0\rangle \otimes |f_0\rangle.$$

$\Rightarrow \rho^A(\rho)$ hat bzw. $\{e_a\}$ die Matrix.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Wegen $\rho^A(\rho)^2 = \rho^A(\rho)$ ist $\rho^A(\rho)$ rein.

„$\Leftarrow$" Sei etwa $\rho^A(\Psi) = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\|\varphi\| = 1$.

Sei $e_0 = |\varphi\rangle, e_1, \dots, e_{n-1}$ eine ON-Basis von H^A.
Sei $f_0, \dots, f_{m-1}$ —— " —— H^B

$$\Rightarrow |\Psi\rangle = \sum_{a,b} \Psi_{ab}\, |e_a \otimes f_b\rangle$$

$$\Rightarrow \rho^A(\Psi) = \sum_{a_1,a_2} \left(\sum_b \Psi_{a_1 b}\, \overline{\Psi_{a_2 b}}\right) |e_{a_1}\rangle\langle e_{a_2}|$$

$$= |e_0\rangle\langle e_0|$$

$$\Rightarrow \sum_b \Psi_{a_1 b}\, \overline{\Psi_{a_2 b}} = \begin{cases} 1, & a_1 = a_2 = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi_{ab} = 0, \quad \forall a \neq 0, \ \forall b$$

$$\Rightarrow \Psi = \sum_b \Psi_{0b}\, |e_0\rangle \otimes |f_b\rangle = |e_0\rangle \otimes \underbrace{\sum_b \Psi_{0b}\, |f_b\rangle}_{=:|\psi\rangle}$$

Bemerkung: FASÄ:

a) $|\Psi\rangle$ ist separabel
b) $\rho^A(\Psi)$ und $\rho^B(\Psi)$ sind rein
c) $\rho^A(\Psi)$ ist rein
d) $\rho^B(\Psi)$ ist rein.

Definition: Sei $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ ein reiner Zustand. Dann nennt man $|\Psi\rangle$ maximal verschränkt, falls

$$\rho^A(\Psi) = \lambda \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{H}^A} \quad \text{mit } 0 < \lambda < 1.$$

Übung: $\Phi^\pm, \Psi^\pm \in {}^q\mathcal{H}^{\otimes 2}$ sind jeweils maximal verschränkt.

M. A. Nielsen J. L. Chuang, Quantum Information and Quantum Information

Preskill, John CalTech, Skript, Lecture Notes

Einstein - Podolsky - Rosen - Paradoxon
(EPR)

EPR definieren "Elemente der Realität".

EPR geben ein hinreichendes Kriterium:

„Wenn es möglich ist, den Wert einer physikalischen Eigenschaft mit 100% Sicherheit vor einer Messung vorherzusagen, dann ist diese physikalische Eigenschaft ein Element der Realität."

Betrachte $H = {}^{q}H^{\otimes 2}$ und den reinen Zustand

$$|\Psi\rangle = |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle \right)$$

$|\Psi^-\rangle$ ist maximal verschränkt.

Alice beobachtet das erste qBit, Bob das zweite.

Alice mißt den Spin in Richtung der v-Achse, d.h. sie mißt

$$\sigma = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 \quad , \quad v \in \mathbb{R}^3, \ \|v\| = 1$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli-Matrizen

Also: $\sigma = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - v_2 i \\ v_1 + v_2 i & -v_3 \end{pmatrix}$. Dann hat

σ die EW ± 1. Seien $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zugehörige $\underbrace{\text{EV.}}_{\text{orthonormierte}}$ Sei $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2)$ mit

$$|0\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |b\rangle$$
$$|1\rangle = \gamma |a\rangle + \delta |b\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} |ba\rangle &= |b\rangle \otimes |a\rangle \\ |ab\rangle &= |a\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \underbrace{\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{= e^{i\theta} \text{ (nicht beobachtbarer Phasenfaktor)}} \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\doteq \frac{|ab\rangle - |ba\rangle}{\sqrt{2}}$$

Wenn nun A den EW $+1$ mißt, dann entspricht dies der Messung $\sigma \otimes \mathbb{1}^B$ am Gesamtsystem. Der Eigenraum zu $+1$ ist gegeben $\mathbb{C}|aa\rangle + \mathbb{C}|ab\rangle$. Die Projektion ist gegeben durch

$$|aa\rangle\langle aa| + |ab\rangle\langle ab|$$

$\Rightarrow$ das Gesamtsystem geht über in den Zustand

$$|ab\rangle$$

Also wird Bob mit Sicherheit EW -1 messen.

Also ist für jedes $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, der Spin in Richtung v für Bobs Teilchen ein Element der Realität (nach EPR).

Damit wäre die QM unvollständig.

EPR konnte 30 Jahre später experimentell wiederlegt werden. Schlüssel dazu:

Bellsche Ungleichungen

Charly präpariert zwei Partikel. C kann das beliebig oft wiederholen. C schickt ein Teilchen an A, das andere an B.

A führt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine von zwei Messungen durch. Entweder P_Q oder P_R wird gemessen. Mögliche Meßwerte: ± 1

Ebenso: B mißt P_S oder P_T, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Leicht:

$$QS + RS + RT - QT = (Q+R)S + (R-Q)T$$
$$= \pm 2$$

Sei $p(q,r,s,t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß $Q=q$, $R=r$, $S=s$, $T=t$.

Dann gilt für den Erwartungswert:

$$E(QS+RS+RT-QT)$$
$$= \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)\,(qs+rs+rt-qt)$$
$$\leq \sum p(q,r,s,t)\cdot 2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT) \leq 2}$$

Was liefert die QM?

C präpariert stets

$$|\Psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\Psi^-\rangle$$

$$Q = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{-Z-X}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{Z-X}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$- - - \Rightarrow$$

$$\langle QS\rangle_{\psi} + \langle RS\rangle + \langle RT\rangle - \langle QT\rangle = 2\sqrt{2}$$
