Vorlesung 6

01.06.2021

${}^q\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$ qBit - Raum

$\sigma_z : {}^q\mathcal{H} \to {}^q\mathcal{H}$ Observable mit EW ± 1

$|0\rangle$ EV zum EW $+1$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ON-Basis

$|1\rangle$ EV zum EW -1

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \underbrace{|\alpha|^2 + |\beta|^2}_{= \|\psi\|} = 1$$

$|0\rangle$ und $|1\rangle$ haben im klassischen Äquivalente

Alle anderen nennt man eine "Superposition".

<u>Wichtig:</u> $H : {}^q\mathcal{H} \to {}^q\mathcal{H}$, $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

"Pauli - Matrizen"

$\lambda = +1$ wird mit der Wahrscheinlichkeit

$$\underline{\underline{P_\psi(\lambda)}} = \|P_\lambda|\psi\rangle\|^2$$
$$= \| |0\rangle\langle 0|\psi\rangle \|^2 = |\langle 0|\psi\rangle|^2$$
$$= |\langle 0|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|^2 = \underline{\underline{\alpha^2}}$$

gemessen.

Die Blochdarstellung

Sei $\varrho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : {}^q\mathcal{H} \to {}^q\mathcal{H}$ ein Dichteoperator

$$\varrho^* = \varrho \implies a, d \in \mathbb{R}, \ \bar{b} = c$$

$$1 = \operatorname{Tr}(\varrho) = a + d \implies a = \frac{1+x_3}{2}, \ d = 1 - a = \frac{1-x_3}{2}$$

Sei $c = \frac{1}{2}(x_1 + i x_2)$. Dann gilt:

$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(E_2 + x \cdot \sigma \right) \quad \text{wobei für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \hat{\in} \mathbb{R}^3$$

$$x \cdot \sigma := x_1 \sigma_x + x_2 \cdot \sigma_y + x_3 \sigma_z$$

Seien $q_{1/2}$ die EW von $\varrho \implies q_{1/2} = \dfrac{1 \pm |x|}{2}$

Da $\varrho \geq 0$, folgt $|x| \leq 1$.

Fazit: Mischungen von qBits lassen sich durch $x \in B_1(\mathbb{R}^3)$ parametrisieren. Dies nennt man die Blochdarstellung. ($B_1(\mathbb{R}^3)$ = Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$)

Lemma: $\quad \rho$ rein $\iff |x| = 1$

Beweis: $\quad \rho$ rein $\iff \rho^2 = \rho \iff \left(\frac{1 \pm |x|}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm |x|}{2}$

$$\iff \frac{1}{4}\left(1 \pm 2|x| + |x|^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm |x|\right)$$

$$\iff \frac{1 + |x|^2}{4} = \frac{1}{2} \iff |x| = 1 \qquad \blacksquare$$

Qbytes

Klassisch: Aus Bits werden Wörter

$$(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$$

Bspl.: Ein Wasserstoffatom wird beschrieben

$$H^P \otimes H^E$$

Def.: $\quad {}^{q}H^{\otimes n} := \underbrace{{}^{q}H \otimes \dots \otimes {}^{q}H}_{n \text{ Faktoren}}$

klar: $\quad \dim {}^{q}H^{\otimes n} = 2^n$

Sei $x \in \mathbb{N}_0$, $0 \le x < 2^n$. Sei

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j, \quad x_j \in \{0,1\}.$$

Def.: $|x\rangle^n = |x\rangle := |x_{n-1}\rangle \otimes |x_{n-2}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle$

$$= |x_{n-1}\, x_{n-2} \dots x_0\rangle$$

nennt man <u>Rechenbasis</u> von ${}^q H^{\otimes n}$.

Bspl: $n = 2$, ${}^q H = \mathbb{C}|0\rangle + \mathbb{C}|1\rangle$.

$$|0\rangle^2 = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

$$|1\rangle^2 = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$$

$$|2\rangle^2 = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

$$|3\rangle^2 = |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Lemma: $\{ |x\rangle^n : 0 \le x < 2^n \}$ ist eine ON-Basis des ${}^q H^{\otimes n}$.

Beweis: Sei $0 \le x, y < 2^n$. Dann gilt:

$$\langle x | y \rangle = \prod_{i=0}^{n-1} \langle x_i | y_i \rangle = \begin{cases} 1, & x_i = y_i \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \qquad \blacksquare$$

<u>Def.:</u> Die <u>Bell-Basis</u> des ${}^q\mathcal{H}^{\otimes 2}$ ist gegeben durch

$$|\Phi^\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$$

$$|\Psi^\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right)$$

<u>Übung:</u> Die Bell-Basis ist eine ON-Basis.

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$.

Seien M^A und M^B Observable. Dann zeigt man leicht:

$$\left(M^A \otimes M^B\right) \, |\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle := M^A|\varphi\rangle \otimes M^B|\psi\rangle$$

ist selbstadjungiert.

<u>Beispiel:</u> $\mathcal{H}^A = \mathcal{H}^B = {}^q\mathcal{H}$. Wir berechnen $\sigma_z \otimes \sigma_z$ bez. der Bell-Basis. Zur Erinnerung:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\sigma_z \otimes \sigma_z\right) |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sigma_z \otimes \sigma_z\right) \left(|0\rangle \otimes |0\rangle \pm |1\rangle \otimes |1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes |0\rangle \pm |1\rangle \otimes |1\rangle \right) = \underline{\underline{|\Phi^{\pm}\rangle}}$$

Ebenso zeigt man:

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z)\,|\Psi^{\pm}\rangle = -\,|\Psi^{\pm}\rangle$$

$$(\sigma_x \otimes \sigma_x)\,|\Phi^{\pm}\rangle = \pm\,|\Phi^{\pm}\rangle$$

$$(\sigma_x \otimes \sigma_x)\,|\Psi^{\pm}\rangle = \pm\,|\Psi^{\pm}\rangle$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x \otimes \sigma_x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Klar:</u> $\sigma_z \otimes \sigma_z$ und $\sigma_x \otimes \sigma_x$ vertauschen.

Messwert von $\sigma_z \otimes \sigma_z$	$\sigma_x \otimes \sigma_x$	Zustand nach der Messung
$+1$	$+1$	$|\Phi^{+}\rangle$
$+1$	-1	$|\Phi^{-}\rangle$
-1	$+1$	$|\Psi^{+}\rangle$
-1	-1	$|\Psi^{-}\rangle$

Sei wieder $H = H^{AB} = H^A \otimes H^B$.

Sei $\{|e_a\rangle\}$ eine ON-Basis von H^A

$\{|f_b\rangle\}$ H^B

Dann ist $\{|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle\}$ eine ON-Basis von H.

Sei

$$|\Psi\rangle = \sum_{a,b} \underbrace{\Psi_{ab}}_{\in \mathbb{C}} \left(|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle\right).$$

Der reine Gesamtzustand $|\psi\rangle$ bzw. $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ induziert einen Zustand für das System A, der von der sogenannten Teilspur $Tr^B(\rho)$ beschrieben wird.

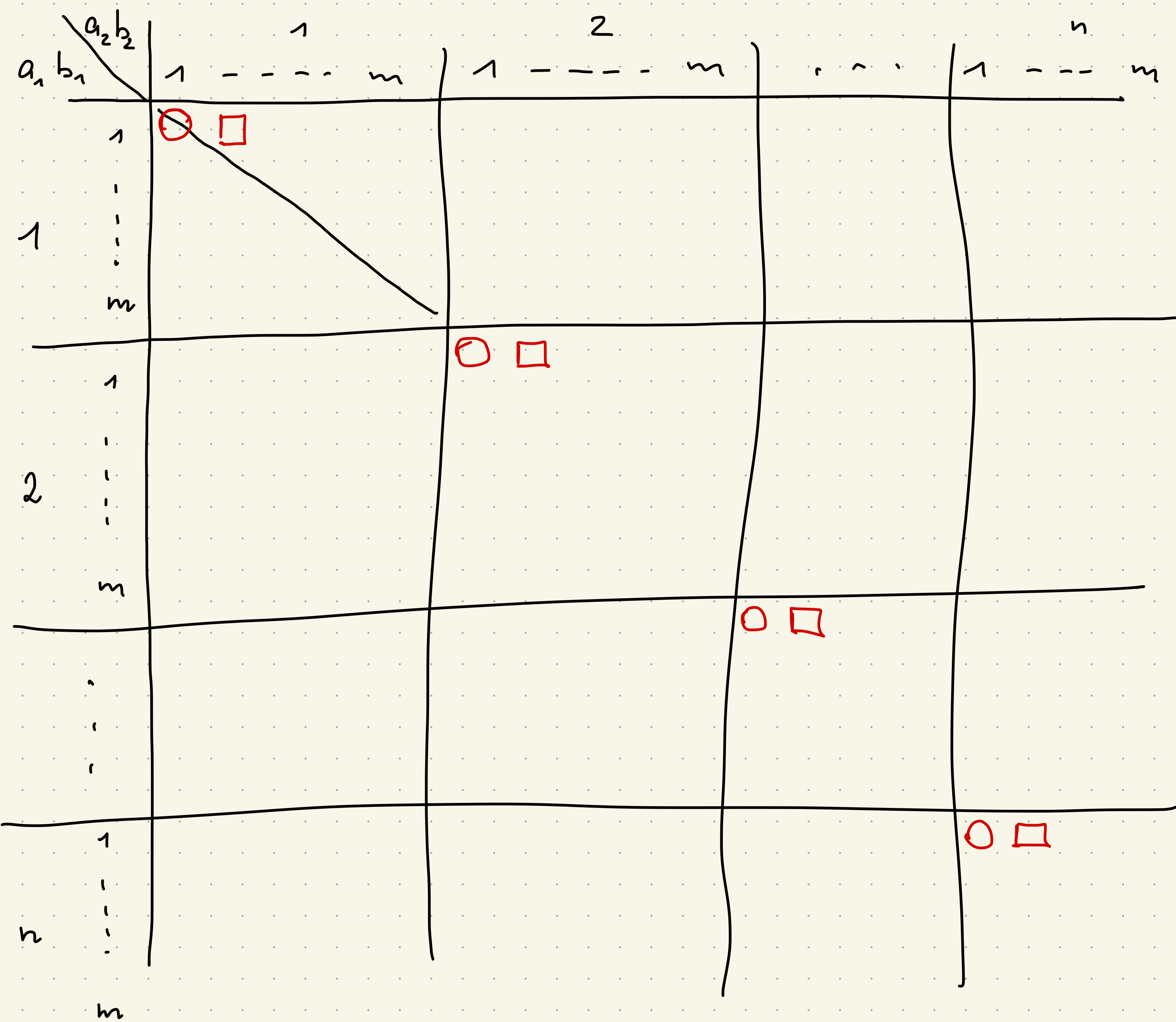
<u>Definition:</u> Für einen Operator $\rho: H^A \otimes H^B \to H^A \otimes H^B$ ist die <u>Teilspur</u> $Tr^B(\rho): H^A \to H^A$ definiert durch

$$\langle M^A \rangle_{Tr^B(\rho)} = \langle M^A \otimes 1^B \rangle_\rho, \quad \forall M^A: H^A \to H^A$$

<u>Satz:</u> Sei $\rho: H^{AB} \to H^{AB}$ ein Dichteoperator. Dann beschreibt $Tr^B(\rho) =: \rho^A(\rho)$ den Dichteoperator, der den Zustand beschreibt, wenn man nur A betrachtet.

Sei $\left(\varrho_{a_1b_1,a_2b_2}\right)$ die Matrix von ϱ bez der ON-Basis $\{|e_a\rangle \otimes |f_b\rangle\}$. Dann hat $\varrho^A(\varrho)$ die Matrix

$$\left(\varrho^A(\varrho)_{a_1a_2}\right) = \left(\sum_b \varrho_{a_1b,a_2b}\right)$$



Analog: $\left(\rho^B(\rho)_{b_1 b_2}\right) = \left(\sum_{a} s_{ab_1, ab_2}\right)$

$\sum \bigcirc$ liefert $\rho^B(\rho)_{11}$ $\qquad$ $\sum \square$ liefert $\rho^B(\rho)_{12}$

Beispiel: $|\phi^+\rangle$ entspricht $\rho = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$

$$\rho : {}^{q}H \otimes {}^{q}H \to {}^{q}H \otimes {}^{q}H$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\left(|00\rangle + |11\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 11|\right)\right)$$

hat bzw. der Rechenbasis

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

die Matrix

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \rho^A(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^B(\rho) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen $\left(\rho^A(\rho)\right)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho^A(\rho)$

ist $\rho^A(\rho)$ ein echt gemischter Zustand.