Vorlesung 5

18.5.2021

# Wiederholung

| | |
|---|---|
| Physikalisches System | Hilbertraum $H$ |
| Phys. Messgrößen / Observable | $A: H \to H$ mit $A^* = A$ |
| Reine Zustände | $\|\psi\rangle \in H$, $\\|\psi\\| = 1$ |
| Mögliche Messwerte | EW von $A$ |
| Messwahrscheinlichkeit des EW $\lambda$ | $\\| P_\lambda \|\psi\rangle \\|^2$ ↑ Projektion auf den Eigenraum von $\lambda$ |
| Mittelwert der Messung | $\langle A \rangle_\psi := \langle \psi \| A\psi \rangle$ |
| Varianz oder Streuung | $\Delta_\psi(A) = \sqrt{\langle \psi \| (A - \langle A \rangle_\psi 1)^2 \psi \rangle}$ |
| Zustand nach der Messung von $\lambda$ | $\dfrac{P_\lambda \|\psi\rangle}{\\| P_\lambda \|\psi\rangle \\|}$ |

**Beispiel:** Spin eines Elektrons $\qquad H = \mathbb{C}^2$

Spin in Richtung $x$, $y$ oder $z$ wird durch

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Spin in Richtung $v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$.

wird beschrieben durch $v \cdot \sigma := v_1 \sigma_x + v_2 \sigma_y + v_3 \sigma_z$

Ü: $v \cdot \sigma$ ist selbstadjungiert.

Wir setzen: $|\uparrow_z\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zum EW $+1$

$|\downarrow_z\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $-1$

Falls $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, so sind die Messwertwahrscheinlichkeiten

$|\alpha|^2$ für die Messung von $\lambda = +1$

$|\beta|^2$ $\lambda = -1$

Mittelwert: $|\alpha|^2 - |\beta|^2$

Satz: $\Delta_\psi(A) = 0 \iff \psi$ ist Eigenzustand von $A$.

Definition: Zwei Observable $A, B$ sind kompatibel, falls $[A, B] = 0$, wobei $[A, B] := AB - BA$

Proposition (Unschärferelation)

$$\Delta_\psi(A)\, \Delta_\psi(B) \geq \left| \left\langle \frac{1}{2i} [A, B] \right\rangle_\psi \right|$$

Beweis: [Scherer, S. 25] ▤

## Heisenbergsche Unschärferelation:

$A$ = Ortsoperator, $B$ = Impulsoperator

Dann gilt: $[A, B] = i\hbar \cdot 1$ mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$h$ = Plancksche Konstante

$$\Rightarrow \Delta_\psi(A)\,\Delta_\psi(B) \geq \frac{\hbar}{2}$$

**Postulat 4** (Zeitentwicklung)

Jede zeitliche Veränderung, die nicht durch eine Messung verursacht wird,

$|\psi(t_0)\rangle$ = Zustand zur Zeit $t_0$

$\longrightarrow |\psi(t)\rangle$ = Zustand zur Zeit $t$,

wird durch einen von $t_0$ und $t$ abhängigen unitären Operator beschrieben, d.h.

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

Zusatz: $U(t, t_0)$ ist Lösung des Anfangswertproblems

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = \mathcal{H}\, U(t, t_0)$$

$$U(t, t_0) = 1$$

$\mathcal{H}$: Hamilton-Operator.

# Gemischte Zustände

Allgemeiner werden <u>Zustände</u> durch <u>Dichteoperatoren</u> $\rho : H \to H$ beschrieben.

<u>Definierende Eigenschaften:</u>

1) $\rho = \rho^*$ 2) $\rho \geq 0$, d.h. $\langle \psi | \rho \psi \rangle \geq 0$, $\forall |\psi\rangle \in H$

3) $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

Falls $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ mit $\|\psi\| = 1$, so spricht man von einem <u>reinen Zustand</u>.

Es gelten entsprechende Postulate. z.B. wird P1 zu

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Erwartungswert der Observablen } A$$
$$= \mathrm{Tr}(\rho A).$$

<u>Übung:</u> a) Zeige: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Dichteoperator

b) Für $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \langle \psi | A \psi \rangle$$

## Kostproben:

a) $\langle \varphi_1 \mid (|\psi\rangle\langle\psi|\varphi_2) \rangle = \langle \varphi_1|\psi\rangle\langle\psi|\varphi_2\rangle$

Selbstadjungiertheit:

$= \langle (\varphi_1|\psi\rangle\langle\psi|)\, \varphi_2 \rangle$

oder mathematisch:

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{mit ON-Basis } \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\Rightarrow \left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)^* = \overline{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\right)}^{\,t} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

b) $$\operatorname{Tr}(\rho A) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\, A\right)$$

$$= \operatorname{Tr}\left( (x_i \bar{x}_j)_{i,j}\, (a_{ij}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{x}_j a_{ji} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right)$$

$$= \langle \psi \mid A\psi \rangle = \langle A \rangle_\psi$$

<u>Satz:</u> Ein Dichteoperator $\rho: H \to H$ hat folgende Eigenschaften:

1) Es gibt $p_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, ..., n = \dim(H)$, so daß $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, sowie eine ON-Basis $\{|\psi_j\rangle\}$, so daß

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} p_j \, |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

2) $0 \leq \rho^2 \leq \rho$, d.h. $\rho - \rho^2$ ist positiv.

3) $\|\rho\| \leq 1$

<u>Beweis:</u> Sei $\{|\psi_j\rangle\}$ eine ON-Basis bez. der der <u>selbstadjungierte</u> Operator $\rho$ die EW $p_j \in \mathbb{R}$ hat.

Dann folgt aus $\rho \geq 0$:

$$\underline{\underline{0}} \leq \langle \psi_j | \rho \psi_j \rangle = \langle \psi_j | p_j \psi_j \rangle = p_j \|\psi_j\| = \underline{\underline{p_j}}$$

$$\mathrm{Tr}(\rho) = 1 = \sum_{j=1}^{n} p_j$$

$\rho^2$ wird bez. der ON-Basis $\{|\psi_j\rangle\}$ dargestellt durch

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho - \rho^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_1 - p_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n - p_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle \psi \mid \rho \psi \rangle = \sum_{i=1}^{n} (p - p_i^2) \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(p_i - p_i^2)}_{\geq 0} |x_i|^2$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} x_i |\psi_i\rangle, \quad x_i \in \mathbb{C} \qquad \geq 0$$

3) $$\|\rho\psi\|^2 = \langle \rho\psi \mid \rho\psi \rangle = \langle \psi \mid \rho^2 \psi \rangle$$

$$\overset{\rho^2 \leq \rho}{\leq} \langle \psi \mid \rho \psi \rangle \overset{\text{CSU}}{\leq} \|\psi\| \, \|\rho\psi\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\rho\psi\|}{\|\psi\|} \leq 1 \quad \Rightarrow \|\rho\| \leq 1,$$ nach Definition der Operatornorm. ■

Mit ähnlichen Rechnungen:

<u>Satz:</u> $\rho$ ist ein reiner Zustand $\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^2$.

<u>Beweis:</u> [ Scherer ] ■

# Qbits

**Definition:** Ein Qbit ist ein quantenmechanischer Zustand in einem zweidim. Hilbertraum $\mathcal{H}$.
Zu $\mathcal{H}$ gehört eine Observable $\sigma_z$, die die normierten EV $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zu den EW $+1$ und $-1$ hat.

**Beispiele:**

1) Elektronenspin $\qquad \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

Eigenzustände von $\sigma_z$:
$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{EW } +1$$
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{EW } -1$$

Ebenso könnte man $\sigma_x$ mit den Eigenzustände

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +1 \end{pmatrix} \quad \text{EW } +1$$
$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{EW } -1$$

Übung: Nachrechnen!

verwenden.

$\sigma_y$ hat Eigenzustände

$$|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \quad \text{EW} +1$$
$$|\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|0\rangle + |1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ +1 \end{pmatrix} \quad \text{EW } -1$$

2) Polarisiertes Licht (Photon) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
[Scherer]

Ein reiner Qbit ist von der Form

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

"Superpositionen"

## Operationen auf Qbits

P4 $\Longrightarrow$ es sind (außer Messungen) nur unitäre Transformationen möglich

Im Klassischen: $\{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

| | 0 | id | NOT | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

"$U(2)$ ist sehr viel größer", aber jede Transformation ist invertierbar.

Bspl: XOR : $\{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$

$$(x, y) \longmapsto x + y \pmod 2$$

**Definition:** Die <u>Hadamard-Transformation</u> ist definiert durch

$$H := \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} : {}^{q}\mathcal{H} \longrightarrow {}^{q}\mathcal{H}$$

**Leicht:** In der Basis $\left\{ |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ hat $H$ die Darstellung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2).$$