Vorlesung 4

11.5.2021

V_1 mit Basis $e_1, \ldots, e_n$

V_2 —— " —— $f_1, \ldots, f_m$

$V_1 \otimes V_2$ hat K-Basis $e_i \otimes f_j$. Falls

$$x = \sum_i x_i e_i, \quad y = \sum_j y_j f_j,$$

dann:

$$x \otimes y = \sum_{i,j} x_i y_j (e_i \otimes f_j) \in V_1 \otimes V_2$$

$\mapsto$ bilinear

$$(x, y) \in V_1 \times V_2$$

Seien $u_i : V_i \to V_i$ Endomorphismen, dann:

$$u_1 \otimes u_2 : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$$
$$x \otimes y \longmapsto u_1(x) \otimes u_2(y)$$

<u>Rechenregeln:</u>

$$\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y = \lambda (x \otimes y), \quad \lambda \in K$$
$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$
$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

Seien H^A und H^B Hilberträume. Dann setzt man

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle^A \cdot \langle y_1, y_2 \rangle^B$$

Dies ist ein Skalarprodukt auf $H^A \otimes H^B$.

Die Bra-Ket-Notation

Erinnerung:

$$H \longrightarrow H^*$$
$$\varphi \longmapsto \langle \varphi, - \rangle = \langle \varphi |$$

Sprechweise: "Bra - φ"

Entsprechend schreibt man

$H \ni \varphi = |\varphi\rangle$ " Ket - φ"

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ON - Basis von H. Dann gilt:

$$\psi = \sum_i \langle e_i, \psi \rangle e_i$$ bzw. in Bra-Ket - Notation

$$|\psi\rangle = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i | \psi \rangle$$

Beispiel: Sei $|\psi\rangle \in H$ normiert, d.h. $\|\psi\| = 1$.
Dann ist $|\psi\rangle\langle\psi|$ die Projektion auf $\mathbb{C}\cdot\psi$

Denn: Für $|\varphi\rangle \in H$ ist zu zeigen:

$|\varphi\rangle - |\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle$ steht senkrecht auf $|\psi\rangle$.

Dazu: $\langle\psi|\varphi\rangle - \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1}\langle\psi|\varphi\rangle = 0.$ ■

Allgemeiner: Sei $f: H \to H$ ein Operator und $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ON-Basis. Sei

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_j |e_j\rangle a_{ji}$$

Dann gilt: $f = \sum_{i,j} |e_i\rangle a_{ij} \langle e_j|$

Denn: $f(e_k) = \sum_j |e_j\rangle a_{jk}$

$$\sum_{i,j} |e_i\rangle a_{ij} \langle e_j | e_k\rangle = \sum_i |e_i\rangle a_{ik}$$

Definition: Einen Operator $P: H \to H$ mit $P^* = P$ und $P^2 = P$ nennt man Projektor.

Lemma: Zu einem Projektor P gibt es eine Teilmenge $\{\psi_j\} \subseteq H$ orthonormierter Vektoren mit

$$P = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

Beweis: $P^2 = P \Rightarrow$ das Mipo ist Teiler von $X(X-1)$

$P^* = P \Rightarrow$ es gibt eine ON-Basis $\{|\psi_j\rangle\}$, so daß P

Diagonalgestalt hat.

$$\Rightarrow \quad P = \sum_{j=1}^{\dim(H)} |\psi_j\rangle \lambda_j \langle \psi_j| \quad , \quad \underbrace{\lambda_j}_{\text{EW}} \in \{0,1\}$$

<u>Bem:</u> Hier, wie auch im Folgenden, werden wir oft stillschweigend $\dim(H) < \infty$ voraussetzen. ∎

Abstrakte Quantenmechanik

Präparation ⟶ Messung ⟶ Berechnung von Mittelwert und relativer Häufigkeit

<u>Sprachgebrauch:</u>

- Eine meßbare physikalische Größe heißt <u>Observable.</u>
- Man nennt eine <u>Präparation</u> bzw. die statistische Gesamtheit von Objekten, die z.B. den Mittelwert und Häufigkeitsverteilung ergeben, einen <u>Zustand</u>.

Ein quantenmechanisches System ist abstrakt ein Hilbertraum H.

Postulate der QM

P1: (Observable und reine Zustände)

Eine Observable ist ein selbstadjungierter Operator. Falls die Präparation der statistischen Gesamtheit so ist, daß sich für jede Observable $A: H \to H$, der Mittelwert mittels $|\psi\rangle \in H$, $\|\psi\| = 1$, durch

$$\langle A \rangle_\psi := \langle \psi | A\psi \rangle$$

berechnen läßt, so sagt man, daß die Präparation im reinen Zustand $|\psi\rangle$ ist. Man nennt $|\psi\rangle$ den Zustandsvektor.

Sei $A = \sum_j |e_j\rangle \lambda_j \langle e_j|$ mit einer ON-Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann gilt:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_j \langle \psi | e_j \rangle \lambda_j \langle e_j | \psi \rangle$$

$$= \sum_j \lambda_j \underbrace{|\langle e_j | \psi \rangle|^2}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit mit der} \\ \lambda_j \text{ gemessen wird (bei} \\ \text{nicht ausgearteten EW), siehe P2}}}$$

<u>P2:</u> Die möglichen Meßwerte einer Observablen A sind durch das Spektrum von A gegeben. Wenn das Quantensystem im Zustand $|\psi\rangle \in H$ ist, λ ein EW von A ist und P_λ der Projektor auf den Eigenraum von λ ist, dann gilt:

$P_\psi(\lambda) :=$ Wahrscheinlichkeit, daß eine Messung λ ergibt

$$= \| P_\lambda |\psi\rangle \|^2 \qquad (*)$$

<u>Bspl:</u> $\dim(H) < \infty$, λ EW mit Eigenraum $\mathbb{C}e$ $\Rightarrow$ $P_\lambda = |e\rangle\langle e|$ und

$\|e\| = 1$ $\quad \|P_\lambda|\psi\rangle\|^2 = \| \, |e\rangle\langle e|\psi\rangle \|^2 = |\langle e|\psi\rangle|^2$

<u>Bemerkung:</u> Durch $(*)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Spec(A) definiert

<u>Beweis:</u> (nur $\dim H < \infty$ und für nicht ausgeartete EW, d.h. geom. Vielfachheiten sind allesamt gleich 1)

$$\sum_{j=1}^{n} P_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \| P_{\lambda_j} |\psi\rangle \|^2 = \sum_j |\langle \psi | e_j \rangle|^2 = \|\psi\|^2 = 1$$

Hierbei ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine ON-Basis von H bestehend aus EV von A. Also $\psi = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle$

$\blacksquare$

<u>Beispiel:</u> Interner Drehimpuls (Spin) eines Elektrons. Der Spin besteht aus 3 Observablen, die als Drehimpulsvektor mit 3 Komponenten

$$S = (S_x, S_y, S_z)$$

zusammengefaßt werden. Es genügt $H = \mathbb{C}^2$ zu betrachten. Wir betrachten die Operatoren

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Betrachte die Zustände

$$|\uparrow_z\rangle := |0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{EV zum EW } 1 \text{ von } \sigma_z$$

$$|\downarrow_z\rangle := |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad -1$$

Superpositionen: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Die Erwartungswerte sind

$$\langle\sigma_z\rangle_{|0\rangle} = \langle 0|\sigma_z|0\rangle = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

$$\langle\sigma_z\rangle_{|1\rangle} = -1$$

$\lambda = 1$ wird im Zustand $|0\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\langle 0|0\rangle|^2 = 1$ gemessen.

$\lambda = -1$ wird im Zustand $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\langle 1|1\rangle|^2 = 1$ gemessen.

<u>Aufgabe:</u> Berechne die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen die EW von σ_x im Zustand $|0\rangle$ gemessen werden.

Die EW von σ_x sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ mit EV

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{P2}{\Longrightarrow} \quad |\langle\uparrow_x|0\rangle|^2 = \frac{1}{2} = |\langle\downarrow_x|0\rangle|^2$$

<u>Definition:</u> Die <u>Streuung</u> der Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ ist definiert als

$$\Delta_\psi(A) := \sqrt{\langle\psi \mid (A - \langle A\rangle_\psi 1_H)^2 \psi\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle (A - \langle A\rangle_\psi 1_H)^2 \rangle_\psi}$$

Falls $\Delta_\psi(A) = 0$, so sagt man, der Wert der Observablen A im Zustand $|\psi\rangle$ ist <u>scharf</u>.

Lemma: $\Delta_\psi(A) = 0 \iff |\psi\rangle$ ist Eigenzustand.

Beweis: Übung oder [Scherer, Prop. 2.12] ∎

P3 (Projektionspostulat)

Das quantenmechanische System sei im Zustand $|\psi\rangle$. Sei A eine Observable mit EW λ.
Falls eine Messung λ ergibt, so bewirkt die Messung eine Zustandsänderung

$$|\psi\rangle = \text{Zustand vor der Messung} \xrightarrow{\text{Messung}}$$

$$\frac{P_\lambda |\psi\rangle}{\| P_\lambda |\psi\rangle \|} = \text{Zustand nach der Messung.}$$

Sprechweise: Die Messung von λ_k zwingt das Objekt aus dem reinen Zustand $|\psi\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|\langle e_k|\psi\rangle|^2$ in den Eigenzustand $|e_k\rangle$

Hierbei: $\{e_1, \dots, e_n\}$ ON-Basis von H aus EV von A mit nicht ausgearteten EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.