

Vorlesung 3

4.5.2021



Selbstadjungierte Operatoren und hermitesche Matrizen

$K = \mathbb{C}$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Prä-Hilbertraum

Def.: $\mu \in \text{End}(E)$ heißt selbstadjungiert oder hermitesch, falls für alle $x, y \in E$ gilt:

$$\langle \mu(x), y \rangle = \langle x, \mu(y) \rangle$$

Beobacht.-g.: Sei $\mu: E \rightarrow E$ selbstadjungiert. Dann sind die EW von μ reell.

Bew.: Sei $\mu(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda \|x\|^2 = \langle x, \mu(x) \rangle = \langle \mu(x), x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} .$$

□

Satz: Sei $\dim(E) < \infty$ und $\mu \in \text{End}(E)$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine ON-Basis von E bez. der μ Diagonalgestalt hat.

Beweisskizze: klar für $n=1$, wobei $n = \dim(E)$

$n \geq 2$: Sei e_1 ein EV zum EW λ_1 , oE $\|e_1\|=1$.

Sei $F := (\mathbb{C}e_1)^\perp$

Dann: $\mu_F := \mu|_F : F \rightarrow F$

μ_F ist wieder selbstadjungiert und man kann mittels Induktion schließen. □

Def.: $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ heißt
hermitesch, falls

$$\overline{A}^t = A.$$

klar: Falls $A \in M_n(\mathbb{R})$, so gilt:

hermitesch $\Leftrightarrow$ symmetrisch

Satz: a) $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch $\Rightarrow \mu_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$
ist selbstadjungiert

b) $\dim(E) = n < \infty$, μ selbstadjungiert $\Rightarrow$ die
darstellende Matrix bez. jeder ON-Basis
ist hermitesch.

ohne Beweis

Satz: Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitesch (bzw.
 $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch). Dann gibt es

$$P \in U(n) = \{ P \in GL_n(\mathbb{C}) \mid P \overline{P}^t = E_n \} \quad (\text{bzw. } P \in O(n)),$$

so daß

$$P^{-1} A P = \overline{P}^t A P = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ & \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Beweis: Lineare Algebra II



Hilberträume

Def.: a) Sei E ein Prähilbertraum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E . Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} : d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

b) E heißt vollständig, falls jede CF in E konvergiert.

c) Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Prähilbertraum.

Beispiel: Sei $E/\mathbb{C}$ ein Prähilbertraum, $\dim(E) < \infty$. Dann ist E ein Hilbertraum.

Skizze: Alle Normen auf E sind äquivalent, d.h. zu $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ gibt $C > 0$, so daß

$$C^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

d.h. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ induzieren die gleiche Topologie.

Wähle also eine Basis $e_1, \dots, e_n$ von E und definiere

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| := \max \{ |\alpha_1|, \dots, |\alpha_n| \}$$

Dann zeigt man: $x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(k)} e_i$ ist CF

$\Leftrightarrow (\alpha_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{C}$ für $i=1, \dots, n$

Sei $\alpha_i := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(k)}$. Es folgt:

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x := \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \blacksquare$$

Jeder endlich dimensionale Hilbertraum ist
 ist isomorph ^{als Hilbertraum} zum $\mathbb{C}^n$: sei $\dim(E) = n < \infty$

und $e_1, \dots, e_n$ eine ON-Basis.

Sei

$$\varphi: \mathbb{C}^n \longrightarrow E, x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Dann ist φ ein Iso. von VR und es gilt:

$$\left\langle \sum_i \overline{x_i} e_i, \sum_i y_i e_i \right\rangle_E = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \langle x, y \rangle$$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_E$$

Der Satz von Riesz

Satz: Sei E ein separabler Hilbertraum (d.h. es gibt eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subseteq E$).

Dann ist die natürliche Abb.

$$E \longrightarrow E^* := \text{Hom}(E, \mathbb{C})$$

$$x \longmapsto \Lambda_x := \langle x, - \rangle$$

eine Isometrie, d.h.

$$i) \quad \Lambda_x \text{ ist stetig und } \|\Lambda_x\| = \|x\|$$

$$\sup_{\|y\|=1} \{ |\Lambda_x(y)| : y \in E \}$$

ii) falls $\Lambda: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, so gibt es genau ein $x \in E$ mit $\Lambda = \Lambda_x$.

Beweis: Funktionalanalysis oder LinAlg II falls $\dim(E) < \infty$. ▢

Das Tensorprodukt

Seien V_1, V_2 zwei VR über K von endlich oder unendlich Dimension. Seien

$$e_1, \dots, e_n \text{ und } f_1, \dots, f_m$$

Basen.

Definition: 1) $V_1 \otimes V_2 := \langle e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \rangle_K$

Die Elemente $e_i \otimes f_j$ bilden dabei eine Basis.

2) Für $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, y = \sum_{j=1}^m \mu_j f_j$ sei

$$x \otimes y := \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j$$

Leicht: Die Abbildung $V_1 \times V_2 \xrightarrow{z} V_1 \otimes V_2$
 $(x, y) \mapsto x \otimes y$
 ist eine bilineare Abbildung.

Universelle Eigenschaft: Sei W ein VR und
 $u: V_1 \times V_2 \rightarrow W$ bilinear. Dann gibt es
 genau einen Homom. $\tilde{u}: V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$, so
 daß

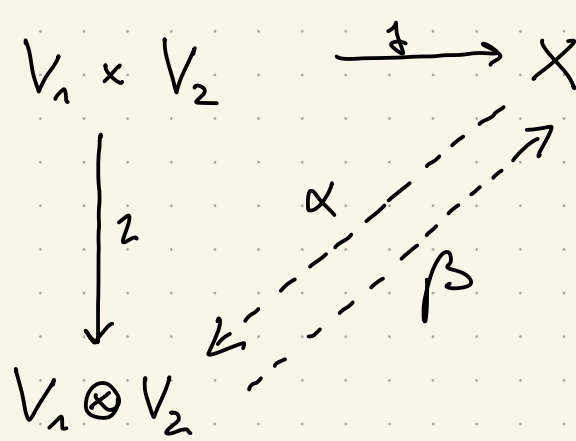
$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{z} & V_1 \otimes V_2 \\ \downarrow u \text{ bilinear} & \swarrow \exists! \tilde{u} \text{ linear} & \\ W & & \end{array}$$

kommutiert.

Beweis: Man definiere: $\tilde{u}(e_i \otimes f_j) = u(e_i, f_j)$.

Bemerkung: Die universelle Eigenschaft zeigt, 
 daß $V_1 \otimes V_2$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig
 ist.

Denn:



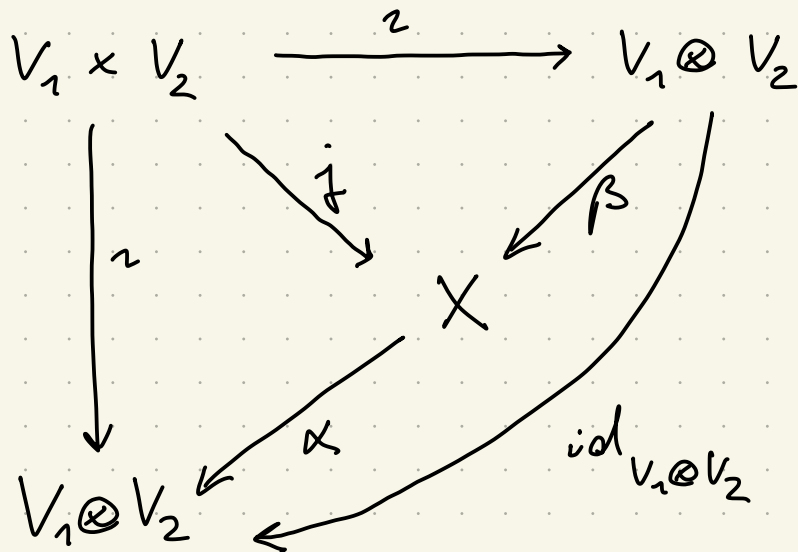
erfülle ebenfalls die universelle Eigenschaft

Nach zu zeigen:

$$\alpha \circ \beta = \text{id}_{V_1 \otimes V_2} \quad (*)$$

$$\beta \circ \alpha = \text{id}_X \quad (**)$$

Zu (*):

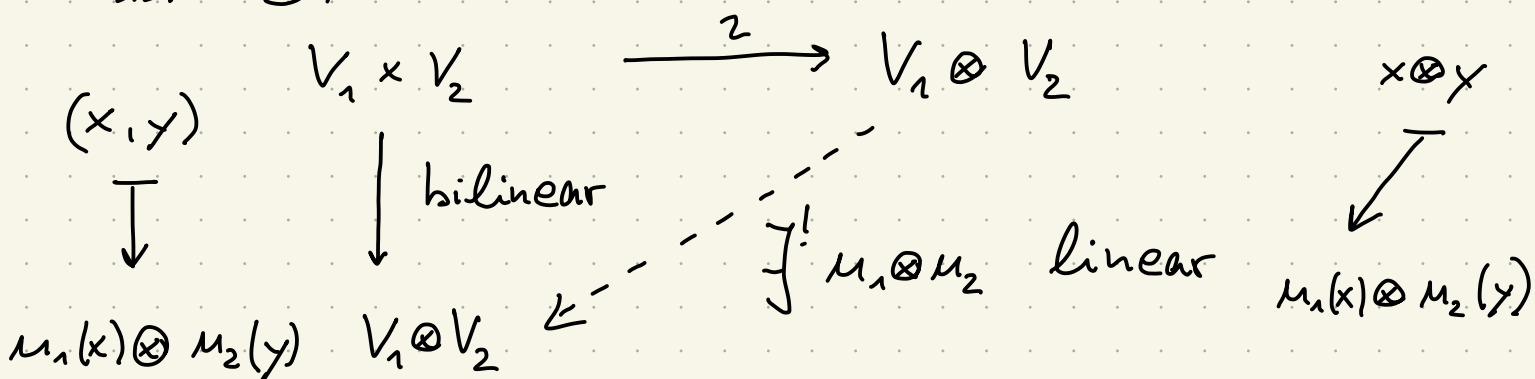


Eindeutigkeit

$$\Rightarrow \text{id}_{V_1 \otimes V_2} = \alpha \circ \beta$$

Analog zeigt man (**).

Seien $\mu_1: V_1 \rightarrow V_1$, $\mu_2: V_2 \rightarrow V_2$ lineare Abb. Dann:



Lemma: Seien μ_1 und μ_2 bez. der Basen
 $e_1, \dots, e_n$ und $f_1, \dots, f_m$
 dargestellt durch $A \in M_n(K)$, $B \in M_m(K)$.
 Dann ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ bez. der Basis
 $e_i \otimes f_j$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$
 dargestellt durch

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in M_{nm}(K)$$

Beweis: Sei

$$\mu_1(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j, \quad \mu_2(f_k) = \sum_{l=1}^m b_{lk} f_l.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \otimes \mu_2)(e_i \otimes f_k) &= \mu_1(e_i) \otimes \mu_2(f_k) \\ &= \sum_{j,l} a_{ji} b_{lk} (e_j \otimes f_l) \end{aligned} \quad \square$$

Seien nun $(H_A, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ und $(H_B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$
 zwei endlich-dim. Hilberträume.

Satz + Definition:

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle := \langle x_1, x_2 \rangle_A \langle y_1, y_2 \rangle_B$$

$$x_1, x_2 \in H_A, y_1, y_2 \in H_B$$

+ lineare

Fortsetzung

ist ein Skalarprodukt auf $H_A \otimes H_B$.

Beweis: Allgemein siehe Reed/Simon,
Functional Analysis

Hier: Alles endlich dimensional.

Sesquilinearität ist offensichtlich.

Positivität: Wähle ON-Basen $e_1, \dots, e_n$
und $f_1, \dots, f_m$ von H_A und H_B . Dann gilt
für $z = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (e_i \otimes f_j)$

$$\langle z, z \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \lambda_{ij} (e_i \otimes f_j), \sum_{k,l} \lambda_{kl} (e_k \otimes f_l) \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \overline{\lambda_{ij}} \lambda_{kl} \langle e_i, e_k \rangle_A \langle f_j, f_l \rangle_B$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\lambda_{ij}} \lambda_{ij} = \sum_{i,j} |\lambda_{ij}|^2 \geq 0$$

mit Gleichheit $\Leftrightarrow z = 0$

