Vorlesung 10

29.6.2021 '

Wiederholung

Sei $H = {}^{?}H^{\otimes n}$. Dann ist QFT gegeben durch

$$|j\rangle^n \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{jk} |k\rangle^n$$

wobei $N = 2^n$, $\omega = e^{2\pi i/N}$.

$\mathcal{F}$ ist unitär und

$$|k\rangle^n \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} \bar{\omega}^{sk} |s\rangle^n$$

Schreibweise: Für binäre Ziffern $a_1, \dots, a_m \in \{0,1\}$ schreiben wir

$$0.a_1 \dots a_m = \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_m}{2^m}.$$

Lemma: Sei $x = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot 2^j$. Dann ist

$$\mathcal{F}|x\rangle^n = \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} \left[|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_j \dots x_0} |1\rangle \right]$$

Beweis: $$\mathcal{F}|x\rangle^n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} \exp(2\pi i x y / N) |y\rangle^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} \exp\left(2\pi i x / N \cdot \sum_{j=0}^{n-1} y_j 2^j\right) |y_{n-1} y_{n-2} \dots y_0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i x y_j}{N} \cdot 2^j \right)\right) |y_{n-1} \dots y_0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y_0, \dots, y_{n-1} \in \{0,1\}} \prod_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i x y_j}{N} 2^j\right) \bigotimes_{k=n-1}^{0} |y_k\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y_0, \dots, y_{n-1} \in \{0,1\}} \bigotimes_{k=n-1}^{0} \exp\left(\frac{2\pi i x y_k}{N} \cdot 2^k\right) |y_k\rangle$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{k=n-1}^{0} \left(|0\rangle + \exp\left(\frac{2\pi i x}{N} \cdot 2^k\right) |1\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{k=n-1}^{0} \left(|0\rangle + \underbrace{\exp\left(\frac{2\pi i x}{2^{n-k}}\right)}_{\overset{!}{=} e^{2\pi i \, 0.x_{n-1-k} \dots x_0}} |1\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \bigotimes_{j=0}^{n-1} \left(|0\rangle + e^{2\pi i \, 0.x_j \dots x_0} |1\rangle \right)$$

Zum zwiten $\overset{!}{=}$:

$$\frac{x}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j 2^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} x_j \, 2^{j-n+k}$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{n-k-1} x_j \, 2^{j-n+k} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z})$$

$$= 0.x_{n-k-1} \cdots x_0 \qquad \blacksquare$$

<u>Lemma:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j < n$ und $|x\rangle^n \in H = {}^2H^{\otimes n}$. Dann gilt

a) $$H|x_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i\, 0.x_j}|1\rangle\right)$$

b) Für

$$H_j := id^{\otimes(n-1-j)} \otimes H \otimes id^{\otimes j}$$

gilt:

$$H_j|x\rangle^n = |x_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_{j+1}\rangle \otimes \frac{|0\rangle + e^{2\pi i\, 0.x_j}|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes$$

$$\otimes |x_{j-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle.$$

Beweis: b) folgt aus a).

Erinnerung: $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2}} |1\rangle \right)$$

$\blacksquare$

Definition: Sei $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, $j > k$, $\theta_{jk} := \frac{\pi}{2^{j-k}}$. Der bedingte Phasenschieber

$$P_{jk} : \mathcal{H}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$$

ist definiert durch

$$P_{jk} := id^{\otimes n-1-k} \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes id^{\otimes k}$$
$$+ \, id^{\otimes n-1-j} \otimes \left[|0\rangle\langle 0| + e^{i\theta_{jk}} |1\rangle\langle 1| \right] \otimes id^{j-k-1}$$
$$\otimes |1\rangle\langle 1| \otimes id^{\otimes k} .$$

	$n-1$	j		k	0
	id	id	id	$\vert 0\rangle\langle 0\vert$	id
$+$	id	$\vert 0\rangle\langle 0\vert + e^{i\theta_{jk}}\vert 1\rangle\langle 1\vert$		$\vert 1\rangle\langle 1\vert$	

Bei allen qBits in Stellen zu s, $s \notin \{j, k\}$ ist P_{jk} die Identität.

Seien $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ die Rechenbasiselement von ${}^q H_j \otimes {}^q H_k$. Dann gilt:

$$
\begin{array}{lclcl}
\overset{j\,k}{|00\rangle} & \longmapsto & |00\rangle + 0 & = & |00\rangle \\
|01\rangle & \longmapsto & & & |01\rangle \\
|10\rangle & \longmapsto & |10\rangle + 0 & = & |10\rangle \\
|11\rangle & \longmapsto & 0 + e^{i\theta_{jk}}|11\rangle & = & e^{i\theta_{jk}}|11\rangle
\end{array}
$$

<u>Bemerkung:</u> Falls $x_j = 0$ ist, so wird $|x_k\rangle$ auf $|x_k\rangle$ abgebildet.

Falls $x_j = 1$, so wendet man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{jk}} \end{pmatrix} \quad \text{auf} \quad {}^q H_k \text{ an.}$$

Lemma: Sei $j > k$, $0 \leq k < j \leq n-1$.

Für $l \in \{j, \dots, n-1\}$ sei $|\psi_l\rangle \in {}^q\mathcal{H}_l$ gegeben. Es gelte $|\psi_j\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Sei $x_0, \dots, x_j \in \{0,1\}$. $\qquad \alpha|0\rangle + \beta e^{i\theta_{jk}}|1\rangle$

Zur Verdeutlichung:

$$ {}^q\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{{}^q\mathcal{H}_{n-1} \otimes \dots \otimes {}^q\mathcal{H}_j}_{\substack{\text{beliebige Vektoren} \\ |\psi_l\rangle = \alpha_l|0\rangle + \beta_l|1\rangle}} \otimes {}^q\mathcal{H}_{j-1} \otimes \dots \otimes {}^q\mathcal{H}_0 $$

Dann gilt:

$$ P_{jk}\left(|\psi_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_j\rangle \otimes |x_{j-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle\right) $$

$$ = (1-x_k)\left(|\psi_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_j\rangle \otimes |x_{j-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle\right) $$

$$ + x_k \left(|\psi_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{j+1}\rangle \otimes \left(\alpha|0\rangle + \beta e^{i\theta_{jk}}|1\rangle\right) \otimes |x_{j-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle\right) $$

$$ = |\psi_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{j+1}\rangle \otimes \left(\alpha|0\rangle + \beta e^{i\pi \frac{x_k}{2^{j-k}}}|1\rangle\right) \otimes |x_{j-1}\rangle \otimes \dots \otimes |x_0\rangle . $$

<u>SATZ:</u> Es gilt

$$\mathcal{F} = S^{(n)}\, H_0\, P_{10}\, H_1\, P_{20}\, P_{21}\, H_2\, P_{30}\, P_{31}\, P_{32} \;----$$
$$--- \; H_{n-2}\, P_{n-1,n-2} \cdots P_{n-1,0}\, H_{n-1}$$

bereits definiert

<u>Beweis:</u> Scherer S. 187 $\blacksquare$

Ebenfalls bei Scherer: Schematische Darstellung als Quantenschaltkreis.

<u>Folgerung:</u> Sei $S_{\mathcal{F}}$ die Anzahl der elementaren Rechenschritte zur Berechnung von $\mathcal{F}$ in Abhängigkeit von n. Dann:

$$S_{\mathcal{F}}(n) = O(n^2).$$

<u>Beweis:</u>

Anzahl der Anwendungen von H: n $\qquad O(n)$

—"— P: $\sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$ $\qquad O(n^2)$

$\blacksquare$

Phasenschätzung

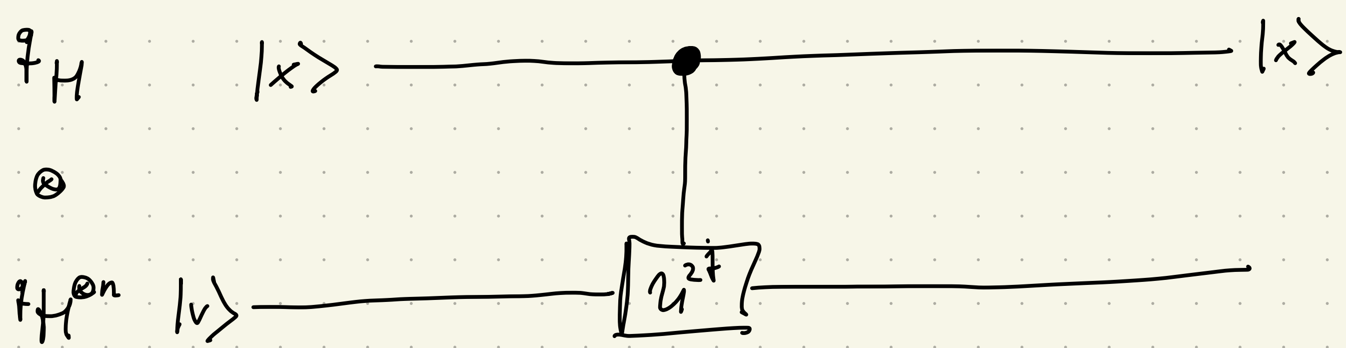
Sei $\mathcal{U}: \mathcal{H}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$ unitär und u sei ein EV. Sei

$$\mathcal{U}|u\rangle = e^{2\pi i \varphi}|u\rangle, \quad 0 \le \varphi < 1.$$

<u>ZIEL:</u> Berechne eine gute Approximation an φ.

<u>Voraussetzungen:</u> Wir haben eine black box, die folgendes leistet: sie präpariert $|u\rangle$ und berechnet kontrolliertes $\mathcal{U}^{2^j}$ für $j \in \mathbb{N}_0$.

<u>Zur Erinnerung:</u>



tut das folgende

$$|0\, v\rangle \longmapsto |0\, v\rangle$$

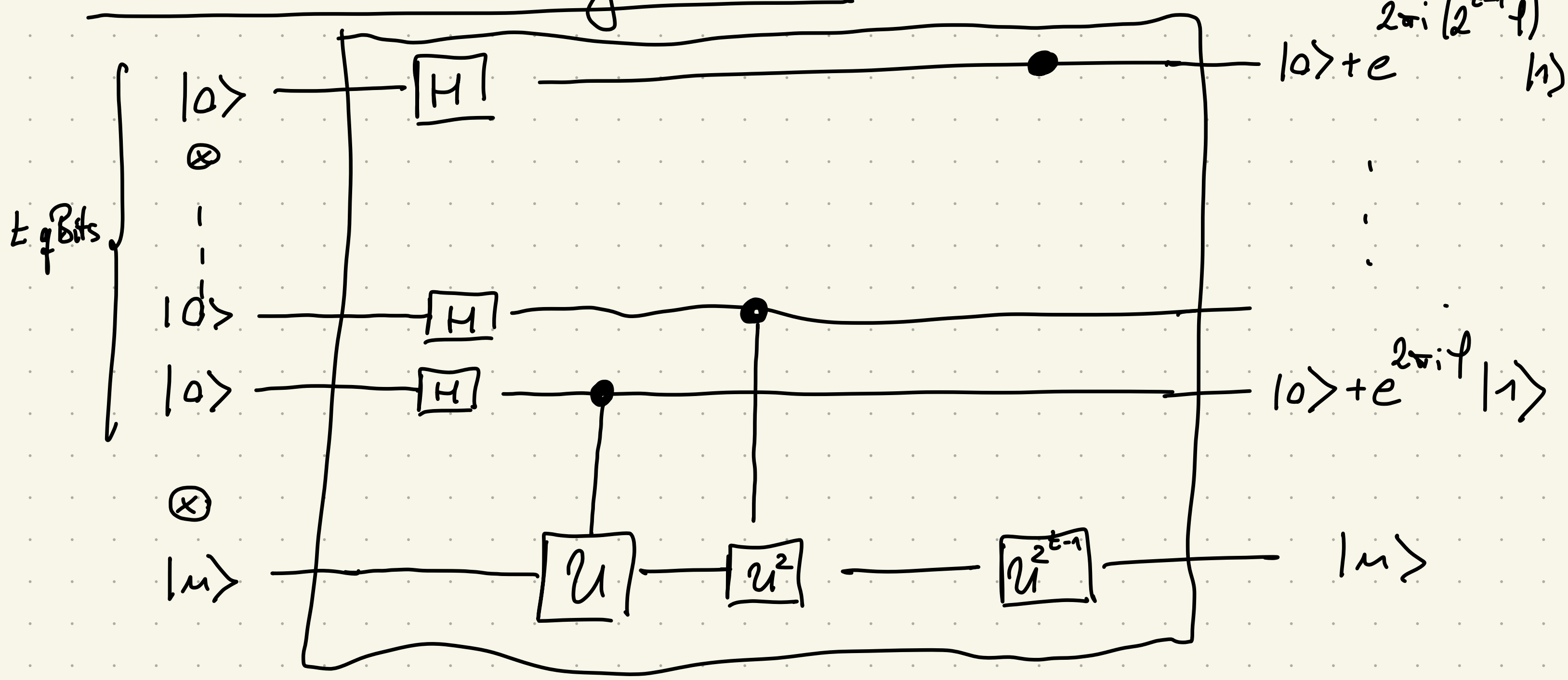
$$|1\, v\rangle \longmapsto |1\rangle \otimes \mathcal{U}^{2^j}|v\rangle.$$

Der Algorithmus nutzt <u>zwei</u> Register:

1) t qBits, zu Anfang auf $|0\rangle$ gesetzt.

2) $H^{\otimes n}$, zu Anfang im Zustand $|u\rangle$

1. Schritt des Algorithmus:



Rechtfertigung am Beispiel $t=2$

$$|00u\rangle \longmapsto \frac{1}{2}\Big[(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\otimes u\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0u\rangle+|1u\rangle)\Big]$$

$$\longmapsto \frac{1}{2}\Big[(|0\rangle+|1\rangle)\otimes\big(|0\rangle\otimes|u\rangle+|1\rangle\otimes e^{2\pi i\varphi}|u\rangle\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(|0\rangle+|1\rangle)\otimes\underbrace{\big(|0\rangle+e^{2\pi i\varphi}|1\rangle\big)}_{\mathcal{I}_0'}\otimes|u\rangle\Big].$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|0\rangle \otimes \Psi_0 \otimes |u\rangle + |1\rangle \otimes \Psi_0 \otimes |u\rangle \Big]$$

$$\longmapsto \frac{1}{2}\Big[|0\rangle \otimes \Psi_0 \otimes |u\rangle + |1\rangle \otimes \Psi_0 \otimes e^{2\pi i (2\varphi)} |u\rangle \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\left(|0\rangle + e^{2\pi i (2\varphi)} |1\rangle\right) \otimes \Psi_0 \otimes |u\rangle \Big]$$

<u>Zweiter Schritt:</u> Führe eine inverse QFT F^{-1} durch.

<u>Dritter Schritt:</u> Simultane Messung von σ_j, $j = 0, \ldots, t-1$ im ersten Register, wobei

$$\sigma_j := id \otimes \ldots \otimes id \otimes \sigma_z \otimes id \otimes \ldots \otimes id .$$