

5. Übungsblatt Elliptische Kurven**Aufgabe 1**

Studieren Sie den Abschnitt "Legendre Form" in Silvermans Buch.

Aufgabe 2 Sei $\text{char}(K) \neq 3$ und $A \in \bar{K}^\times$. Zeigen Sie, dass

$$E: X^3 + Y^3 = AZ^3$$

zusammen mit $\mathcal{O} = [1, -1, 0]$ eine elliptische Kurve ist.

Hinweis: Definiere $\phi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ und nutze die Hurwitzsche Geschlechterformel.

Aufgabe 3

a) Seien $V_1 \subseteq \mathbb{A}^n$ und $V_2 \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Zeige: $V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ ist eine affine Varietät.

Betrachten Sie die Segre-Einbettung

$$\varphi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{nm+n+m}, \quad ([x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_m]) \mapsto [x_i y_j]_{i,j}.$$

b) Zeige, dass φ injektiv und $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ eine projektive algebraische Menge ist.

c) Sei \mathbb{A}^n identifiziert mit $\{x \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}$ und analog \mathbb{A}^m . Bestimme $\varphi(\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m)$ als Teilmenge des \mathbb{P}^{nm+n+m} .

Besprechung: Do 02.12.2021 in der Übung.