Übungsblatt 5

19.11.2021

Aufgabe 1) Vervollständigen Sie den Beweis (siehe unten) von $l(D) < \infty$.

Aufgabe 2) Nutzen Sie $H^1(G_K, Gl_n(\bar{K})) = 0$ (siehe Silverman, Appendix B), um das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma: Sei V ein $\overline{K}$-VR mit stetiger G_K-Wirkung. Es gelte $\sigma(\alpha v) = \sigma(\alpha)\sigma(v)$, $\forall \sigma \in G_K$, $\alpha \in \overline{K}$, $v \in V$. Sei $V_K := V^{G_K}$. Dann gilt:

$$V \simeq \overline{K} \otimes_K V_K$$

Mit anderen Worten: V hat eine Basis bestehend aus Elementen in V_K.

$$\mathcal{L}(D) = \{ f \in \overline{K}(C)^\times \mid \operatorname{div}(f) \geq -D \} \cup \{0\}$$

<u>Beh:</u> $\ell(D) = \dim_{\overline{K}}(\mathcal{L}(D)) < \infty$

<u>Bew:</u> $\mathcal{L}(0) = \{\text{reguläre Funktionen}\} = \overline{K}$

oE $D = \sum_{i=1}^{n} n_i (P_i) > 0$

Warum oE? $D' \geq D \implies \mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D')$

Betrachte $\mathcal{L}_0(D) := \{ f \in \overline{K}(C)^\times \mid \operatorname{ord}_{P_i}(f) \geq 0, \; i = 1, \dots, n \}$

$$\mathcal{L}(D) / \mathcal{L}(D) \cap \mathcal{L}_0(D) \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{L}(D) + \mathcal{L}_0(D) / \mathcal{L}_0(D)$$

$$\mathcal{L}(D) \cap \mathcal{L}_0(D) = \mathcal{L}(0) = \overline{K}$$

Es reicht zu zeigen: $\dim_{\overline{K}} \mathcal{L}(D) + \mathcal{L}_0(D) / \mathcal{L}_0(D) < \infty$

Seien $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n$ Uniformisierende bei $P_1, \dots, P_n$

<u>Approximationssatz:</u> Seien $Q_1, \dots, Q_m \in C$ paarweise verschiedene Punkte auf C. Seien $f_1, \dots, f_n \in \overline{K}(C)$ und $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es $f \in \overline{K}(C)$ mit

$$\operatorname{ord}_{Q_i}(f - f_j) \geq n_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fixiere $j \in \{1, \dots, n\}$ und finde $t_j \in \overline{K}(C)$ mit

$$\mathrm{ord}_{P_i}\left(t_j - \tilde{t}_i^{-1}\right) \geq 0 \quad , \quad i \neq j$$

$$\mathrm{ord}_{P_j}\left(t_j - \underbrace{\tilde{t}_j}_{1}\right) \geq 2$$

<u>Beh:</u> t_j ist Uniformisierende bei P_j

und $\mathrm{ord}_{P_i}(t_j) = -1 \qquad i \neq j$

d.h. t_j^{-1} ist regulär bei P_i

<u>Dazu:</u> $\mathrm{ord}_{P_i}(t_j \tilde{t}_i - 1) \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} t_j \in M_{P_i} \Rightarrow t_j \tilde{t}_i \in M_{P_i} \\ \qquad\qquad\quad t_j \tilde{t}_i - 1 \in M_{P_i} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in M_{P_i} \lightning$$

Also: $t_j \notin M_{P_i}$

Für $j = 1, \dots, n$ wähle Koeff. $a_{j,l} \in \overline{K} = \frac{\overline{K}[C]_{P_j}}{M_{P_j}}$

sodaß

$$f - \underbrace{\left(a_{j,n_j} t_j^{-n_j} + a_{j,n_j-1} t_j^{-(n_j-1)} + \dots + a_{j,1} t_j^{-1}\right)}_{f_j :=}$$

regulär in P_j ist.

<u>Betrachte:</u> $f - \sum_{j=1}^{n} f_j$

Es folgt:

$$\dim_{\overline{K}}(\mathcal{L}(D)) \leq \deg(D) + 1$$

(Übung)