Prof. Dr. W. Bley 05.11.2021

3. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1
Studieren Sie den Beweis von Proposition II.1.4 in Silvermans Buch: Sei C/K eine Kurve und $t \in K(C)$ eine Uniformisierende im nicht-singulären Punkt $P \in C(K)$. Dann ist $K(C)/K(t)$ endlich und separabel.

Aufgabe 2 a) Seien C_1/K und C_2/K zwei Kurven. Folgern Sie aus Silverman, Th. II.2.4 (b) die folgende Äquivalenz:

$$C_1 \text{ ist birational äquivalent zu } C_2 \text{ (über K)} \iff K(C_1) \simeq_K K(C_2).$$

b) Zeige: Sei C/K eine Kurve. Dann gibt es eine nicht-singuläre Kurve C'/K, die zu C birational äquivalent ist. (Hinweis: Silverman, Th. II.2.4 (c))

Aufgabe 3 Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und C/K die durch

$$C \colon Y^2 = f(X) = a_0 X^d + a_1 X^{d-1} + \ldots + a_d.$$

definierte projektive Kurve. Zeige, dass C für $d \geq 4$ stets singulär ist.

Besprechung: Do 04.11.2021 in der Übung.