Übung 11

Elliptische Kurven

21.1.22

<u>Aufgabe 1)</u> Sei K ein Zahlkörper und

$$S = M_K^\infty \cup \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}.$$

a) <u>Zeige:</u> $\mathcal{O}_{K,S}$ ist ein Dedekindring.

b) Sei $I_{K,S}$ die Gruppe der gebrochenen $\mathcal{O}_{K,S}$-Ideale und

$$P_{K,S} = \{\alpha \mathcal{O}_{K,S} \mid \alpha \in K^\times\}.$$

Sei $Cl_{K,S} := I_{K,S}/P_{K,S}$ die <u>S-Klassengruppe</u>

<u>Zeige:</u> $$Cl_{K,S} \simeq Cl_K / \langle [\mathfrak{p}_1], ..., [\mathfrak{p}_n] \rangle$$

c) In der Übung werden wir den Beweis von

$$\mathcal{O}_{K,S}^\times \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}^r, \quad r = |S| - 1$$

skizzieren (unter Benutzung des Dirichletschen Einheitensatzes)

<u>Aufgabe 2)</u> Sei K ein Zahlkörper und E/K eine elliptische Kurve. Wir setzen den Satz von Mordell-Weil voraus. Sei L/K eine unendliche algebraische Körpererweiterung. Für alle Körpererweiterungen M/K mit

$K \subseteq M \subseteq L$, $[M:K] < \infty$

gelte: $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} E(M) < C$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$ unabhängig von M

a) <u>Zeige:</u> $\dim_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E(L)\right) < \infty$

b) <u>Zeige:</u>

$$\left.\begin{array}{l} L/K \text{ galoissch} \\ |E_{tors}(L)| < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow E(L) \text{ ist e-e}$$