Übungsblatt 10

14.01.22

<u>Aufgabe 1)</u> Sei K ein lokaler Körper, der vollständig bezüglich der diskreten Bewertung v ist. Sei E/K eine elliptische Kurve und $E_1(K)$ der Kern der Reduktionsabbildung. Sei $P = (x,y) \in E(K)$. Zeige:

$$P \in E_1(K) \iff v(x) < 0$$

Es gilt dann: $2v(y) = 3v(x)$

<u>Aufgabe 2)</u> (Silverman, Ex. 5.4)
Sei $|K| < \infty$ und seien E und E' elliptische Kurven über K.

a) <u>Zeige:</u> Falls E und E' isogen sind, so gilt
$$\# E(K) = \# E'(K)$$

b) Beweise auch die Umkehrung. (Hinweis: Nutze Silverman, III. 7.7 a)

<u>Aufgabe 3)</u> Studieren Sie den Beweis des folgenden Satzes.

<u>Satz von Lutz und Nagell</u> Sei

$$E: \; y^2 = x^3 + Ax + B, \qquad A, B \in \mathbb{Z}$$

eine elliptische Kurve. Sei $P = (x,y) \in E(\mathbb{Q})$ ein

Punkt endlicher Ordnung. Dann gilt:

a) $x, y \in \mathbb{Z}$

b) $y \neq 0 \implies y^2 \mid 4A^3 + 27B^2$

Ein elementarer Beweis ist in Washingtons Buch enthalten.

Berechnen Sie $E(\mathbb{Q})_{tor}$ für folgende elliptische Kurven über $\mathbb{Q}$:

$E_1: y^2 = x^3 - 2$, $E_2: y^2 = x^3 - 43x + 166$

$E_3: y^2 = x^3 + 2x^2 - 3x$