1. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die singulären Punkte und ihre Tangenten für die folgenden affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ und skizzieren Sie $V_i(\mathbb{R})$.
a) $V_1 : Y^2 = X^3$.
b) $V_2 : 4X^2Y^2 = (X^2 + Y^2)^3$.
c) $V_3 : Y^2 = X^3 + X$.
d) $V_4 : Y^2 = X^3 + X^2$.

Aufgabe 2 Sei V eine affine algebraische Varietät. Sei $I(V) = (f_1, \dots, f_m)$ mit Polynomen $f_i \in \bar{K}[X]$ und $P \in V$. Zeigen Sie, dass der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

nicht von der Wahl des Erzeugendensystems $f_1, \dots, f_m$ abhängt.

Aufgabe 3 Sei V eine affine algebraische Varietät und $P \in V$. Sei $M_P := \{f \in \bar{K}[X] \mid f(P) = 0\}$.
Zeigen Sie:
a) M_P/M_P^2 ist ein endlich dimensionaler $\bar{K}$-Vektorraum.
b) P ist genau dann nicht-singulär, wenn $\dim(M_P/M_P^2) = \dim(V)$ gilt.
(Hinweis: oE sei $P = 0$. Man betrachte $M_1 := (X_1, \dots, X_n)$ und zeige $M_P/M_P^2 \simeq M_1/(M_1^2 + I(V))$.
Es gilt dann: $\dim(M_P/M_P^2) = \dim(M_1/M_1^2) - \dim((M_1^2 + I(V))/M_1^2$.)

Besprechung: Do 28.10.2021 in der Übung.