Protokoll zur Vorlesung Analysis I

Prof. W. Bley

3. August 2011

Protokoll über die 1., 2. und 3. Vorlesung

1 Grundlagen, reelle und komplexe Zahlen, Vollständigkeit

1.1 Grundlagen

In der ersten Vorlesung wurde grundsätzliches zu Aussagen, logischen Zeichen und Mengen eingeführt, hauptsächlich um Notationen und verschiedene, in der Mathematik allgemein verwendete Sprechweisen, festzulegen. Dies soll hier nicht wiederholt werden.
Zwei wichtige Beweisprinzipien:

a) Der indirekte Beweis oder Beweis durch Widerspruch.

b) Die vollständige Induktion.

Das Prinzip des indirekten Beweises wurde an folgendem Satz demonstriert.

Satz 1.1.1 *Sei p eine Primzahl. Dann gibt es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = p$.*

Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert in seiner einfachsten Form wie folgt. Jeder natürlichen Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet. Die Aussagen $A(n)$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, wenn folgendes gezeigt werden kann:

1. $A(1)$ ist richtig. Dies ist der Induktionsanfang.
2. Unter der Induktionsannahme, daß nämlich $A(1), \ldots, A(n)$ richtig sind, ist auch $A(n+1)$ richtig. Dies ist der Induktionsschritt.

Bemerkung 1.1.2 Man kann den Induktionsanfang auch für $A(n_0)$ machen, wobei $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann besagt die Induktionsannahme, daß $A(n_0), \ldots, A(n)$ richtig für $n \geq n_0$ ist und es ist hieraus wieder $A(n+1)$ zu beweisen. Hierdurch wird $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ gezeigt.

Mittels vollständiger Induktion haben wir die folgenden Sätze gezeigt.

Satz 1.1.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Satz 1.1.4 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen einer n-elementigen Menge ist $n!$.*

Satz 1.1.5 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.*

Hierbei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Dies ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge, insbesondere also eine ganze Zahl.
Ebenfalls mit vollständiger Induktion läßt sich die Kardinalität der Potenzmenge bestimmen.

Satz 1.1.6 *Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat 2^n Elemente.*

Hierbei ist die Potenzmenge einer Menge M definiert als die Menge aller Teilmengen von M.

Satz 1.1.7 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.*

1.2 Geordnete Mengen

Definition 1.2.1 Sei M eine Menge. Eine Ordnung auf M ist eine Relation $<$, welche die folgenden Eigenschaften hat:

i) Für alle $x, y \in M$ gilt genau eine der folgenden Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

ii) Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$x < y, \quad y < z \implies x < z.$$

Eine geordnete Menge ist eine Menge, auf der eine Ordnung definiert ist.

Definition 1.2.2 Sei M eine geordnete Menge und $E \subseteq M$. Dann ist E nach oben beschränkt, wenn es ein $\beta \in M$ gibt, so daß $x \leq \beta$ für alle $x \in E$ gilt. β nennen wir dann eine obere Schranke. Analog definiert man die Begriffe "nach unten beschränkt" und "untere Schranke".

Example 1.2.3 *Sei $M = \mathbb{Q}$ und $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Dann ist E nach oben beschränkt, hat aber keine kleinste obere Schranke. In diesem Sinne hat $\mathbb{Q}$ sozusagen Lücken.*

Definition 1.2.4 Sei M eine geordnete Menge und $E \subseteq M$ eine nach oben beschränkte, nicht-leere Menge. Es existiere ein $\alpha \in M$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) α ist eine obere Schranke zu E.

(ii) Ist $\gamma < \alpha$, so ist γ keine obere Schranke zu E.

Dann nennen wir α die kleinste obere Schranke oder das Supremum von E.
Analog definieren wir die größte untere Schranke oder das Infimum einer nach unten beschränkten nicht-leeren Menge E.

Schreibweise: $\sup(E), \inf(E)$.

Wie das obige Beispiel zeigt, existieren in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen keine Suprema. Dies ist ein Makel der rationalen Zahlen, den es zu beseitigen gilt. Ziel der Vorlesung ist daher, die "Konstruktion" der reellen Zahlen, die diesen Makel der Unvollständigkeit nicht haben werden.

Definition 1.2.5 Wir sagen, daß eine geordnete Menge M die Supremumseigenschaft hat, wenn zu jeder nicht-leeren, nach oben beschränkten Teilmenge $E \subseteq M$ das Supremum existiert.

Wichtige Beobachtung: $\mathbb{Q}$ hat die Supremumseigenschaft nicht.

Analog hätten wir natürlich auch die Infimumseigenschaft definieren können. Das folgende Resultat zeigt, daß eine geordnete Menge genau dann die Supremumseigenschaft besitzt, wenn sie die Infimumseigenschaft besitzt.

Satz 1.2.6 *Sei M eine geordnete Menge mit der Supremumseigenschaft. Sei $B \subseteq M$ eine nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge. Sei U die Menge der unteren Schranken. Dann existiert $\alpha = sup(U)$ und es gilt: $\alpha = \inf(B)$. Insbesondere existiert also das Infimum zu B.*

1.3 Gruppen und Körper

Wir wollen nun die algebraischen Eigenschaften eines Körpers kennzeichnen.

Definition 1.3.1 Sei G eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ$, d.h. zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $a \circ b \in G$. Dann nennen wir G eine Gruppe, wenn folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (Assoziativität) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
- (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein Element $e \in G$, so daß für alle $a \in G$ gilt:

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

- (Existenz vom inversen Element) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $b \in G$, so daß

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Zusatz: Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung $\circ$. Falls für alle $a, b \in G$ gilt

$$a \circ b = b \circ a,$$

so nennen wir die Gruppe abelsch oder kommutativ.

Das neutrale Element e und das Inverse b zu einem Element $a \in G$ sind jeweils eindeutig bestimmt. Dies rechtfertigt die Schreibweisen a^{-1} oder $-a$ für das Inverse in den häufigen Fällen, wo die Verknüpfung eine Multiplikation bzw. eine Addition ist.

Definition 1.3.2 Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt Körper, falls gilt:

1) K ist bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe. Es bezeichne 0 das neutrale Element bezüglich $+$.
2) $K \setminus \{0\}$ ist bezüglich $\cdot$ eine abelsche Gruppe.
3) (Distributivität) Für alle $a, b, c \in K$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Wir benutzen die aus der Schule bekannten Schreibweisen $-a$ für das Inverse bezüglich der Addition, a^{-1} für das Inverse bezüglich der Multiplikation. Ferner schreiben wir oft $a - b$ anstatt $a + (-b)$ und $\frac{a}{b}$ anstatt ab^{-1}.
Beispiele sind der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, aber auch die endlichen Körper $\mathbf{F}_p$, wobei p eine Primzahl ist.

Protokoll über die 4.Vorlesung

1.4 Die Anordnungsaxiome

Wir gehen nun dazu über, Anordnungeigenschaften eines Körpers zu studieren.

Definition 1.4.1 Ein geordneter Körper ist ein Körper K, der zugleich eine geordnete Menge ist, derart daß gilt:

(i) $y < z \implies x + y < x + z, \quad \forall x, y, z \in K.$

(ii) $x > 0$ und $y > z \implies xy > xz, \quad \forall x, y, z \in K.$

Offensichtlich ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper. Endliche Körper kann man nicht anordnen.

Satz 1.4.2 *Die folgenden Aussagen gelten in jedem angeordneten Körper K. Es sei $x, y, z \in K$.*

(a) $x > 0 \iff -x < 0$.

(b) $x > 0, y < z \implies xy < xz$.

(c) $x < 0, y < z \implies xy > xz$.

(d) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$. *Insbesondere also* $1 > 0$.

(e) $0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Definition 1.4.3 Seien M, N zwei Mengen. Unter einer Abbildung f von M nach N versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $f(x) \in N$ zuordnet. f heißt injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

f heißt surjektiv, wenn es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ gibt. Falls f injektiv und surjektiv ist, so nennen wir f bijektiv.

Satz 1.4.4 *Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{N}_0 &\longrightarrow K, \\ n &\mapsto n \cdot 1 \end{aligned}$$

injektiv und mit $+, \cdot$ und $<$ vertäglich, d.h.

$$\begin{aligned} &\varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \\ &\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \\ &n < m \implies \varphi(n) < \varphi(m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dieses Resultat kann man veredeln.

Satz 1.4.5 *Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist*

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow K, \\ \frac{n}{m} &\mapsto \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{\varphi(m)}, & n > 0, m > 0, \\ 0, & n = 0, \\ \frac{-\varphi(n)}{\varphi(m)}, & n < 0, m > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Abbildung, die injektiv und mit $+, \cdot$ und $<$ vertäglich ist.

Bemerkung 1.4.6 Der vorherige Satz besagt, daß $\mathbb{Q}$ in jeden angeordneten Körper K eingebettet werden kann, oder mit anderen Worten, man kann $\mathbb{Q}$ als Teilkörper von K betrachten. Die Rechengesetze und die Anordnug in $\mathbb{Q}$ bleiben dabei erhalten.

Definition 1.4.7 Sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Dann definiert man:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a > 0, \\ 0, & \text{falls } a = 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

$|a|$ heißt der Absolutbetrag von a.

Protokoll über die 5.Vorlesung

Der Absolutbetrag hat die fogenden Eigenschaften.

Satz 1.4.8 *Für $a, b \in K$ gelten:*

1) $|a| \geq 0$.
2) $|a| = 0 \iff a = 0$.
3) $|ab| = |a||b|$.
2) *(Dreieckungleichung)* $|a + b| \leq |a| + |b|$.
2) *(Untere Dreiecksungleichung)* $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

1.5 Der Körper der reellen Zahlen

Wir kommen nun zum zentralen Resultat des ersten Kapitels.

Satz 1.5.1 *Es gibt einen Körper $\mathbb{R}$, der geordnet ist und die Supremumseigenschaft besitzt. Ferner ist $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ eingebettet, so daß $+$, $\cdot$ und $<$ erhalten bleiben*

In der Vorlesung haben wir die Definiton von $\mathbb{R}$ als die Menge der Dedekindschen Schnitte angegeben.

Definition 1.5.2 Eine Teilmenge $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ heißt Dedekindscher Schnitt, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\begin{array}{rl} (i) & \alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}, \\ (ii) & p \in \alpha \text{ und } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q < p \implies q \in \alpha, \\ (iii) & \text{zu } p \in \alpha \text{ gibt es } r \in \alpha \text{ mit } r > p. \end{array}$$

Es sei also nun

$$\mathbb{R} := \{\alpha \mid \alpha \text{ ist Dedekindscher Schnitt }\}.$$

Es wurde gezeigt, dass $\mathbb{R}$ eine geordnete Menge bezüglich

$$\alpha < \beta \overset{def}{\iff} \alpha \text{ ist echte Teilmenge von } \beta$$

ist. Ferner wurde nachgewiesen, dass $\mathbb{R}$ die Supremumseigenschaft hat. Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass $\mathbb{Q}$ die Supremumseigenschaft nicht erfüllt.
Für den ausführlichen Beweis sei der Leser auf das Buch von Rudin, S.19 - 24, verwiesen.
Als erste Konsequenz aus der Supremumseigenschaft beweisen wir

Satz 1.5.3 *(Archimedisches Prinzip) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $nx > y$. Insbesondere gibt es zu $y \in \mathbb{R}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y$.*

Aus dem Archimedischen Prinzip folgern wir

Satz 1.5.4 *($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gibt es $p \in \mathbb{Q}$ mit $x < p < y$.*

Protokoll über die 6. Vorlesung

Der folgende Satz zeigt, daß in den reellen Zahlen n-te Wurzeln existieren. Man erinnere sich, daß wir gezeigt haben, daß die Gleichung $x^2 = p$, p Primzahl, keine Lösung in $\mathbb{Q}$ hat. Dieser Makel von $\mathbb{Q}$ wird durch die Supremumseigenschaft behoben.

Satz 1.5.5 *Sei $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y^n = x, y > 0$.*

Bezeichnung: Die eindeutig bestimmte Zahl y aus dem letzten Satz bezeichnen wir mit $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$.
Aus der Eindeutigkeit und den Rechenregeln im Körper erhalten wir leicht

Folgerung 1.5.6 *Für positive reelle Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(ab)^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{n}} (b)^{\frac{1}{n}}$.*

Bemerkung 1.5.7 Jede reelle Zahl kann man in einen Dezimalbruch entwickeln.

Allgemeiner haben wir gezeigt, daß man jede reelle Zahl in einen b-adischen Bruch entwickeln kann.

1.6 Abzählbarkeit

Definition 1.6.1 Sei M eine nicht leere Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow M$. Oder mit anderen Worten: Jeder natürlichen Zahl n wird ein Element $a_n \in M$ zugeordnet. Man schreibt dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder in aufzählender Form $(a_1, a_2, \ldots)$.

Die folgenden kleinen Verallgemeinerungen sind selbsterklärend: $(a_n)_{n \geq n_0}, n_0 \in \mathbb{Z}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, etc.

Definition 1.6.2 Eine nicht leere Menge M heißt abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow M$ gibt. Oder mit anderen Worten: Es gibt eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß die der Folge unterliegende Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleich der Menge M ist.

Einfache Beobachtungen:
a) Endliche Mengen sind abzählbar.
b) Teilmengen von abzählbaren Mengen sind abzählbar.

Satz 1.6.3 *Abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen sind abzählbar.*

Satz 1.6.4 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Ausgehend von der Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen zeigt man mit dem Cantorschen Diagonalverfahren, daß $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Satz 1.6.5 *Die reellen Zahlen sind überabzählbar.*

Man beachte, daß man diesen Beweis auch mit der b-adischen Entwicklung führen kann.

1.7 Die komplexen Zahlen

Sei

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad i^2 = -1,$$

der Körper der komplexen Zahlen. Formal haben wir $\mathbb{C}$ als die Menge der geordneten Tupel (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ und folgender Addition und Multiplikation eingeführt:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

Ausführlich kann man dies zum Beispiel im Buch von Rudin, Seite 13, nachlesen.

Definition 1.7.1 Sei $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\mathrm{Re}(\alpha) := a$ der Realteil von α, $\mathrm{Im}(\alpha) := b$ der Imaginärteil und $\bar{\alpha} := a - bi$ die komplex Konjugierte von α.

Aus den Definitionen erhält man durch einfache Verifikation den

Satz 1.7.2 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} (a) & \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \\ (b) & z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z), \\ (c) & z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2, \\ (d) & z\bar{z} = 0 \iff z = 0, \\ (e) & z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}. \end{array}$$

Protokoll über die 7. Vorlesung

Definition 1.7.3 Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ der Absolutbetrag oder auch die Länge von z.

Dieser Längenbegriff entspricht genau unserer Vorstellung im Sinne des Satzes von Pythagoras, wenn wir komplexe Zahlen als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ betrachten. Insbesondere ist auch die Dreiecksungleichung erfüllt.

Satz 1.7.4 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\begin{array}{ll} (a) & |z| \geq 0, \\ & |z| = 0 \iff z = 0, \\ (b) & |\bar{z}| = |z|, \\ (c) & |zw| = |z||w|, \\ (d) & |z + w| \leq |z| + |w| \quad \textit{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Bemerkungen 1.7.5 a) $\mathbb{C}$ kann man nicht anordnen.
b) Sei $z \neq 0$. Dann ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

2 Folgen und Grenzwerte

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden sei K stets $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Folge ist stets eine Folge rationaler, reeller oder komplexer Zahlen.

Definition 2.1.1 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt die Folge konvergent in K, wenn es eine Zahl $a \in K$ gibt, so daß folgendes gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $N = N(\epsilon)$, so daß für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge. Wir schreiben $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ oder einfach $a_n \longrightarrow a$.

Man beachte, daß $N = N(\epsilon)$ von ϵ abhängt. Im Allgemeinen wird man N um so größer wählen müssen, je kleiner ϵ ist. Eine Folge konvergiert gegen a, wenn in jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen. Dabei bedeutet "fast alle" alle bis auf endlich viele Ausnahmen.

Satz 2.1.2 *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Wie das Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt, ist die Umkehrung im Allgemeinen falsch.

Satz 2.1.3 *Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Dieser Satz rechtfertigt erst die Bezeichnung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Definition 2.1.4 Eine absteigende Folge

$$I_0 \supseteq I_1 \overset{\supseteq}{\ldots}$$

von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n], a_n, b_n \in \mathbb{R}, b_n > a_n$ heißt Intervallschachtelung.

Satz 2.1.5 *Für die Intervallschachtelung gelte*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0. \qquad (*)$$

Dann gibt es genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für die Existenz von x ist die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen verantwortlich, die Eindeutigkeit folgt aus (*).

Protokoll über die 8. Vorlesung

Definition 2.1.6 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n < C$ (bzw. $a_n > C$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir behandeln nun Summen, Produkte und Quotienten konvergenter Folgen.

Satz 2.1.7 *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren auch die Folgen*

$$(a_n + b_n) \quad \text{und} \quad (a_n b_n)$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Folgerung 2.1.8 *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen und $\lambda, \mu \in K$. Dann ist auch $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Die konvergenten Folgen bilden also einen Untervektorraum im K-Vektorraum aller Folgen.

Satz 2.1.9 *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a und b. Es gelte $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt und die Quotientenfolge*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$$

konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

Für Folgen reeller Zahlen beweisen wir ein erstes Konvergenzkriterium. Wir schicken folgende Definition voraus.

Definition 2.1.10 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt monoton wachsend (bzw. fallend), falls

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (\text{ bzw. } a_{n+1} \leq a_n)$$

für alle Indizes n gilt. Falls hier $>$ (bzw. $<$) gilt, so sprechen wir von strenger Monotonie.

Satz 2.1.11 *Sei (a_n) eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Dann ist (a_n) konvergent in $\mathbb{R}$. Analog: Sei (a_n) eine nach unten beschränkte, monoton fallende Folge reeller Zahlen. Dann ist (a_n) konvergent in $\mathbb{R}$.*

2.2 Unendliche Reihen

Definition 2.2.1 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ nennt man

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$$

die m-te Partialsumme. Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ heißt unendliche Reihe über die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Übliche Bezeichnung: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Falls die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert, so sagt man, daß die unendliche Reihe konvergiert. Der Grenzwert wird dann ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Bemerkung 2.2.2 Wie auch schon bei den Folgen, wollen wir auch allgemeinere Indexmengen zulassen, etwa $\sum_{n\geq n_0}^{\infty} a_n$.

Eine hervorgehobene Bedeutung für spätere Konvergenzsätze hat die sogenannte geometrische Reihe.

Satz 2.2.3 *(Geometrische Reihe) Die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

konvergiert für alle $x \in K$ mit $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$.

Aus dem entsprechenden Resultat für konvergente Folgen erhalten wir sofort

Satz 2.2.4 *Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen und $\lambda, \mu \in K$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$, und zwar gegen den Grenzwert*

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2.3 Bestimmte Divergenz reeller Folgen

Definition 2.3.1 Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (oder uneigentlich konvergent gegen $+\infty$), wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq N$ gilt: $a_n > C$. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$ (oder uneigentlich konvergent gegen $-\infty$), wenn $(-a_n)$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Schreibweisen: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Protokoll über die 9. Vorlesung

Satz 2.3.2 *Für die Folge (a_n) gelte $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq n_0}$ konvergiert gegen 0.*

2.4 Teilfolgen

Definition 2.4.1 Sei (a_n) eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann nennt man die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

eine Teilfolge von (a_n).

Definition 2.4.2 Eine Zahl $a \in K$ heißt Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen a konvergiert. Falls (a_n) eine Folge reeller Zahlen ist, so nennen wir $a \in \{\pm\infty\}$ einen Häufungspunkt im uneigentlichen Sinn, wenn es eine Teilfoge gibt, die bestimmt gegen a divergiert.

Unter der erweiterten Zahlengeraden verstehen wir $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Die Symbole $\pm\infty$ sind keine reellen Zahlen! ∞ ist größer als jede reelle Zahl, entsprechend $-\infty$ kleiner als jede reelle Zahl.

Definition 2.4.3 Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Sei E die Menge aller eigentlichen und uneigentlichen Häufungspunkte, also $E \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup(E) \text{ bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf(E)$$

der Limes superior (bzw.inferior) der Folge (a_n).

Der Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe unten) zeigt, daß die Menge aller Häufungspunkte (im eigentlichen und uneigentlichen Sinn) stets nicht-leer ist. Daher sind $\limsup$ und $\liminf$ wohldefiniert.

Satz 2.4.4 *(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Wir charakterisieren den Limes superior einer Folge reeller Zahlen.

Satz 2.4.5 *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Genau dann gilt*

$$\limsup a_n = a,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
(i) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $a_n < a + \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N$.
(ii) Es gibt unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > a - \varepsilon$.

Bemerkung 2.4.6 Der Beweis zeigt auch, daß Limes superior und inferior stets angenommen werden. Tatschlich implizieren (i) und (ii), daß a selbst eine Häufungspunkt ist.

2.5 Metrische Räume

Definition 2.5.1 Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}^k := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Die Elemente $x \in \mathbb{R}^k$ nennen wir Vektoren.

Vektoren können addiert und skalar multipliziert werden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_k + y_k \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_k \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definition 2.5.2 Wir definieren für $x, y \in \mathbb{R}^k$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

und nennen $\langle x, y \rangle$ das Skalarprodukt von x und y.

Das Skalarprodukt erfüllt folgende einfache Eigenschaften.

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^k$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.

Definition 2.5.3 Für $x \in \mathbb{R}^k$ definieren wir

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

und nennen $||x||$ die Norm von x.

Die Norm erfüllt folgende einfache Eigenschaften.

- $||x|| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^k$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$.
- $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^k$.
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Die letzte dieser Eigenschaften wird als Dreiecksungleichung bezeichnet. Zu ihrem Beweis haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung herangezogen.

Satz 2.5.4 *(Cauchy-Schwarz) Für $x, y \in \mathbb{R}^k$ gilt:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Wir definieren nun auf dem $\mathbb{R}^k$ einen Abstandsbegriff.

Definition 2.5.5 Für $x, y \in \mathbb{R}^k$ definieren wir

$$d(x, y) := ||x - y|| = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Damit wird der $\mathbb{R}^k$ zu einem metrischen Raum, wobei

Definition 2.5.6 Eine nicht-leere Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt metrischer Raum, falls d die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{array}{rl} (i) & d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X, \\ & d(x,y) = 0 \iff x = y. \\ (ii) & d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X. \\ (iii) & d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in X. \end{array}$$

d nennt man eine Metrik oder einen Abstand. (iii) ist die sogenannte Dreiecksungleichung.

Unser wichtigstes Beispiel ist der $\mathbb{R}^k$ mit der Metrik

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{1/2}, \quad d(x,y) := \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Protokoll über die 10. Vorlesung (Dustin Lazarovici)

2.6 Cauchy-Folgen und Vollständigkeit

Satz 2.6.1 *(Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Definition 2.6.2 Sei X ein metrischer Raum und (a_n) eine Folge in X. Dann nennt man (a_n) eine Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $l, m \geq N$ gilt: $d(a_l, a_m) < \epsilon$.
Insbesondere gilt für eine Folge $(a_n)_n$ im $\mathbb{R}^k$:
$(a_n)_n$ Cauchy-Folge $: \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall l, m \geq N : \ \|a_l - a_m\| < \epsilon$.

Satz 2.6.3 *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Definition 2.6.4 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst beschränkt, wenn

$$\mathrm{diam(A) := sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}} < \infty$$

Dies ist äquivalent zu $A \subset U_r(p) := \{x \in X \mid d(p,x) < r\}$ für ein $p \in X$ und hinreichend großes r.

Lemma 2.6.5 *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

Satz 2.6.6 *(Vollständigkeit von $\mathbb{R}^k$) In $\mathbb{R}^k$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.*

Definition 2.6.7 Ein metrischer Raum X ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Bemerkung 2.6.8 a) Der $\mathbb{R}^k$ ist also vollständig.
b) Wegen $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^{2k}$ ist auch $\mathbb{C}^k$ vollständig $\forall k \in \mathbb{N}$.
c) Der $\mathbb{Q}^k$ ist nicht vollständig

Bemerkung 2.6.9 Für die reellen Zahlen sind alle diese Eigenschaften äquivalent:
i) Supremumseigenschaft
ii) Intervallschachtelungsprinzip
iii) Bolzano-Weierstraß
iv) Vollständigkeit

2.7 Konvergenzkriterien für Reihen

Aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen folgt

Satz 2.7.1 *Die Reihe* $\sum a_n$ *konvergiert genau dann, wenn es für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß für alle* $l, m \geq N$ *gilt:* $|\sum_{n=l}^{m} a_n| < \epsilon$.
Insbesondere ($l = m$) *gilt also im Falle der Konvergenz* $|a_n| < \epsilon$ *für alle* $n \geq N$.

Folgerung 2.7.2 *(Notwendiges Konvergenzkriterium)* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent* $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ *Nullfolge.*

Man beachte, daß die Umkehrung im allgemeinen falsch ist.

Definition 2.7.3 Sei (a_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Lemma 2.7.4 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent* $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent*

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch wie das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ zeigt. Absolute Konvergenz ist also „stärker" als Konvergenz.

Satz 2.7.5 *(Leibniz-Kriterium) Sei* $(a_n)_n$ *eine monoton fallende Nullfolge in* $\mathbb{R}$.
Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

konvergent.

Lemma 2.7.6

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ ist konvergent} \iff \left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|\right)_m \text{ ist beschränkt.}$$

Das nächste Kriterium ist von besonderer Bedeutung, unter anderem, weil es Grundlage für die Beweise weiterer Kriterien (Wurzel- und Quotientenkriterium) ist.

Satz 2.7.7 *(Majorantenkriterium) Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe reeller oder komplexer Zahlen. Es gebe eine reelle Folge* $(c_n)_n$*, sodass* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergent ist und ein* $N_0 \in \mathbb{N}$*, soass* $|a_n| \leq c_n$ *für alle* $n \geq N_0$.
Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergent, also* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Die Reihe $\sum c_n$ nennen wir eine konvergente Majorante.

Protokoll über die 11. Vorlesung (Dustin Lazarovici)

Satz 2.7.8 *(Minorantenkriterium) Seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *zwei Reihen reeller Zahlen und es gelte* $a_n \geq b_n \geq 0$ *für alle hinreichend großen* n*. Dann gilt:*

$$\sum b_n \text{ divergiert} \implies \sum a_n \text{ divergiert .}$$

Folgerung 2.7.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *ist divergent für $s \leq 1$ und konvergent für $s > 1$.*

Satz 2.7.10 *(Wurzelkriterium) Gegeben sei eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ reeller oder komplexer Zahlen. Dann gilt:*

$$(a) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent.}$$

$$(b) \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

$$(c) \qquad \text{Für } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \text{ kann man keine allgemeine Aussage treffen.}$$

Satz 2.7.11 *(Quotientenkriterium) Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle oder komplexe Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n. Dann gilt:*

(a) $\exists q < 1\, \exists N \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\ \forall n \geq N \; \Big(\iff \limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Big)$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) $\exists N' \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\, \forall n \geq N' \;\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Bemerkung 2.7.12 Das Wurzelkriterium hat einen größeren Anwendungsbereich als das Quotientenkriterium. Konkret bedeutet dies: Wann immer das Quotientenkriterium Konvergenz anzeigt, so auch das Wurzelkriterium. Wann immer das Wurzelkriterium ohne Ergebnis ist, so auch das Quotientenkriterium.

2.8 Umordnung von Reihen

Definition 2.8.1 Sei Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann nennt man $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wie üblich erlauben wir auch allgemeinere Indexmengen.

Satz 2.8.2 *(Umordnungssatz, Dirichlet) Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung, und zwar gegen den selben Grenzwert.*

Satz 2.8.3 *(Riemannscher Umordnungssatz) Ist die reelle Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber <u>nicht</u> absolut konvergent, dann existiert für jedes beliebige $C \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, sodass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = C$.*

Protokoll über die 12. Vorlesung

2.9 Potenzreihen

Definition 2.9.1 Sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine Potenzreihe.

Satz 2.9.2 *(Satz von Cauchy-Hadamard) Gegeben sei die Potenzreihe $\sum c_n z^n$. Man setze*

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R := \frac{1}{\alpha}.$$

Dann konvergiert die Potenzreihe absolut für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$.

R nennt man den Konvergenzradius der Potenzreihe. Bei der Berechnug von R gelten die folgenden Rechenregeln für das Symbol ∞:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Man beachte, dass für z mit $|z| = R$ keine allgemeine Aussage möglich ist.

2.10 Die Exponentialreihe

Satz 2.10.1 *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Definition 2.10.2 $e := \exp(1) = 2,71\ldots$ heißt Eulersche Zahl.

Will man etwa die Eulersche Zahl numerisch mit nachweisbarer Fehlerabschätzung berechnen, so ist das nächste Resultat hilfreich.

Satz 2.10.3 *(Restgliedabschätzung) Es gilt für alle natürlichen Zahlen $N \geq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$*

$$exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_N(z) \text{ mit } R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

und

$$|R_N(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Von entscheidender Bedeutung für die Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung.

Satz 2.10.4 *Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Dieses wichtige Resultat ist eine einfache Konsequenz aus

Satz 2.10.5 *(Cauchy-Produkt) Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei absolut konvergente Reihen. Sei*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts notieren wir einige einfache Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz 2.10.6 *(a)* $\exp(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(a) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \forall z \in \mathbb{C}$.

(a) $\exp(n) = e^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

2.11 Sinus und Kosinus

Satz 2.11.1 *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *konvergieren die Reihen*

$$\begin{aligned} \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

absolut.

Durch Koeffizientenvergleich beweist man den

Satz 2.11.2

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Folgerung 2.11.3 *(a)* $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

(b) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(c) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Hierbei haben wir die gängige Schreibweise $\cos^n(z) := (\cos(z))^n$ und $\sin^n(z) := (\sin(z))^n$ für $n \in \mathbb{N}$ benutzt.
Teil (b) und (c) bezeichnet man häufig als Additionstheoreme. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \cos(x), \quad \mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sin(x),$$

und $\exp(ix)$ liegt auf dem Einheitskreis $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Protokoll über die 13. Vorlesung

3 Stetige Funktionen

3.1 Allgemeines zu Funktionen

Seien X und Y metrische Räume mit Abstandfunktionen d_X und d_Y. Sei $D \subseteq X$ und $f : D \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Abbildungen nennt man oft auch Funktionen.

Definition 3.1.1 (a) D heißt Definitionsbereich oder Definitionsmenge von f.

(b) $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ heißt das Bild von f. Schreibweise: Bild(f). Etwas allgemeiner bezeichnet für eine Teilmenge $V \subseteq D$ die Menge $f(V) := \{f(x) \mid x \in V\}$ das Bild von V unter f.

(c) Für eine Menge $U \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(U) := \{x \in D \mid f(x) \in U\}$ das Urbild von U unter f.

(d) Die Menge $\{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in D\}$ heißt Graph von f.

Das f^{-1} in der Notation für das Urbild ist nicht zu verwechseln mit der Funktion $\frac{1}{f}$ (falls diese existiert) oder der Umkehrfunktion, die wir später noch kennen lernen (falls f bijektiv ist).

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1 a) Seien X, Y metrische Räume, $D \subseteq X$, und $f : D \longrightarrow Y$ eine Funktion. Sei $a \in D$. Dann heißt f stetig in a, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

b) f heißt stetig, falls f stetig in allen Punkten $a \in D$ ist.

Definition 3.2.2 a) Ein Punkt $a \in X$ heißt Häufungspunkt von D, falls es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen a konvergiert. Man beachte, daß a nicht notwendig in D enthalten sein muss.
b) Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt dicht in X, falls jeder Punkt $x \in X$ ein Häufungspunkt von D ist.

Definition 3.2.3 Seien X, Y metrische Räume, $D \subseteq X$, $f : D \longrightarrow Y$ und $a \in X$ ein Häufungspunkt von D. Dann schreiben wir

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

falls es ein $b \in Y$ gibt, so daß für alle Folgen (x_n) mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Satz 3.2.4 *Sei $f : D \subseteq X \longrightarrow Y$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Aus der Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion hatten wir als Beispiel gezeigt, dass exp an der Stelle $z = 0$ stetig ist. Zusammen mit dem letzten Satz und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir

Satz 3.2.5 *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

Im folgenden sei X stets ein metrischer Raum mit Metrik d.

Definition 3.2.6 a) Sei $r > 0$ und $x \in X$. Dann heißt

$$U_r(x) := \{z \in X \mid d(x,z) < r\}$$

r-Umgebung von x.
b) Sei $E \subseteq X$. Dann nennt man $x \in E$ einen inneren Punkt von E, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß $U_r(x) \subseteq E$.
c) $E \subseteq X$ heißt offen, wenn jeder Punkt $x \in E$ ein innerer Punkt ist.
d) $E \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus E$ offen ist.

Man zeigt leicht, daß jede r-Umgebung $U_r(x)$ offen ist (Übung).
Man beachte, dass im folgenden Satz die Stetigkeit ohne Zuhilfenahme der Metrik charakterisiert wird.

Satz 3.2.7 *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Dann ist f genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Teilmenge $V \subseteq Y$ offen in X ist.*

Satz 3.2.8 *(Kompositum von stetigen Funktionen) Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : D \subseteq X \longrightarrow Y$, $g : E \subseteq Y \longrightarrow Z$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei $h := g \circ f$, d.h. $h(x) := g(f(x))$ für alle $x \in D$. Falls dann f stetig bei $a \in D$ und g stetig bei $f(a)$ ist, so ist auch h stetig in a. Insbesondere ist also das Kompositum stetiger Funktionen stetig.*

Im folgenden sei wie früher K entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien $f, g : X \longrightarrow K$ Funktionen des metrischen Raums X nach K. Dann definiert man Funktionen $f + g, fg, \frac{f}{g}$ von X nach K durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Man beachte, dass $\frac{f}{g}$ nur an den Punkten $x \in X$ definiert ist, wo $g(x) \neq 0$ gilt.
Falls $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$, so kann man in analoger Weise $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definieren.

Satz 3.2.9 *Sei X ein metrischer Raum und $f, g : X \longrightarrow K$ seien stetig in $a \in X$. Dann sind auch $f+g, fg, \frac{f}{g}$ stetig in a. (Beim Quotienten müssen wir natürlich in der Regel $g(a) \neq 0$ voraussetzen.)*

Satz 3.2.10 *a) Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine Funktion mit den Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in X$. Dann gilt:*

$$f \text{ ist stetig in } a \iff f_1, \ldots, f_k \text{ sind stetig in } a.$$

b) Seien $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig in $a \in X$. Dann ist auch $f + g$ stetig in a.

Protokoll über die 14. Vorlesung

3.3 Kompaktheit

In diesem Abschnitt bezeichnet X stets einen metrischen Raum. Wir schicken folgendes Lemma voraus.

Lemma 3.3.1 *Sei $E \subseteq X$ eine nicht-leere Teilmenge. Dann ist E genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (a_n) mit $a_n \in E$ für alle n auch $\lim a_n \in E$ gilt.*

Definition 3.3.2 Unter einer offenen Überdeckung einer Teilmenge $E \subseteq X$ versteht man eine Familie $\{U_\alpha\}$ von offenen Teilmengen U_α von X, so daß

$$E \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Die Indexmenge ist hier bewußt nicht näher spezifiziert. Die α können aus einer beliebigen Indexmenge kommen.

Definition 3.3.3 (Kompaktheit) Eine Teilmenge $E \subseteq X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von E eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 3.3.4 *Kompakte Mengen sind abgeschlossen.*

Satz 3.3.5 *Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt.*

Der folgende Satz ist die entscheidende Grundlage für das weitere Studium der Kompaktheit im Falle $X = \mathbb{R}^k$.

Satz 3.3.6 *(Abgeschlossene Quader sind kompakt) Sei*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^k \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, k\}, \quad a_i < b_i.$$

Dann ist ist Q kompakt.

Bemerkung 3.3.7 Beim Beweis benutzen wir an entscheidender Stelle das Intervallschachtelungsprinzip, welches wiederum auf der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen beruht.

Satz 3.3.8 *(Heine-Borel) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Dann ist E genau dann kompakt, wenn E beschränkt und abgeschlossen ist.*

3.4 Stetigkeit und Kompaktheit

Definition 3.4.1 Sei $f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine Funktion. Dann heißt f beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt: $||f(x)|| \leq M$.

Satz 3.4.2 *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $D \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(D)$ kompakt.*

Der Satz von Heine-Borel impliziert daher.

Folgerung 3.4.3 *Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetige Abbildung und $D \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(D)$ beschränkt und abgeschlossen.*

Folgerung 3.4.4 *Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und und $D \subseteq X$ kompakt. Sei*

$$m := \inf\{f(x) \mid x \in D\}, \quad M := \sup\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Dann gibt es $p, q \in D$ mit der Eigenschaft

$$f(p) = m, \quad f(q) = M,$$

d.h. das Infimum und das Supremum werden angenommen. Mit anderen Worten: Es gibt $p, q \in D$, so dass

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \forall x \in D.$$

Protokoll über die 15. Vorlesung

Definition 3.4.5 Seien A, B zwei nicht-leere Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$g : B \longrightarrow A, \quad g(b) := a, \text{ falls } f(a) = b,$$

die Umkehrfunktion zu f.

Man schreibt häufig f^{-1} für g. Diese Schreibweise führt manchmal zu Verwirrung im Zusammenhang mit dem Urbild $f^{-1}(V)$ einer Teilmenge $V \subseteq B$. Man beachte den Unterschied, der eigentlich stets aus dem Kontext hervorgeht.
Offensichtlich gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_B, \quad g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Satz 3.4.6 *Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv und X kompakt. Dann ist auch die Umkehrabbildung stetig.*

3.5 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 3.5.1 Sei $f : X \longrightarrow Y$. Dann nennt man f gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $d_X(x_1, x_2) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

Offensichtlich impliziert gleichmäßige Stetigkeit die gewöhnliche Stetigkeit. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Jedoch gilt

Satz 3.5.2 *Sei $f : D \subseteq X \longrightarrow Y$ stetig und D kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig auf D.*

3.6 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.6.1 *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.*

Man beachte, daß beim Beweis des Zwischenwertsatzes an entscheidender Stelle die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen eingeht.

Folgerung 3.6.2 *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, a < b$, eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$). Dann gibt es ein zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $c \in [f(b), f(a)]$) ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$.*

Folgerung 3.6.3 *Jedes Polynom $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.*

Folgerung 3.6.4 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

3.7 Logarithmus und allgemeine Potenz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Begriffe *monoton wachsend, streng monoton wachsend, monoton fallend* und *streng monoton fallend* setzen wir als bekannt voraus.

Der folgende Satz ist die Grundlage für die Definition der Wurzelfunktionen, des Logarithmus und der Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen.

Satz 3.7.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, streng monoton wachsende (bzw. streng monoton fallende) Funktion. Dann bildet f das Intervall D bijektiv auf das Intervall $D' := f(D)$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \longrightarrow D$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).*

Protokoll über die 16. Vorlesung

Sei nun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k,$$

stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[k]{x},$$

ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und heißt k-te Wurzel.

Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x),$$

ist stetig, streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab. Die Umkehrfunktion, die mit log bezeichnet wird,

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x),$$

ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus. Der Logarithmus erfüllt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Wir sind nun bereit, um die allgemeine Potenz zu definieren.

Definition 3.7.2 Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x := \exp(x \log(a)).$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Rechenregeln

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

gelten. Die Schreibweise wird ebenfalls gerechtfertigt durch die Beziehung

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \text{ für } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \geq 2.$$

3.8 Stetigkeit von Potenzreihen

Satz 3.8.1 *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in K$, eine Potenzreihe mit Konvergentradius $R > 0$. Dann ist die dadurch definierte Funktion*

$$f\colon D := \{z \in K \mid |z| < R\} \longrightarrow K, \quad z \mapsto f(z),$$

stetig.

Als Konsequenz notieren wir, dass *exp*, sin und cos stetige Funktionen sind.

3.9 Die Zahl π

Wir definieren $\pi/2$ als die kleinste positive Nullstelle des Cosinus.

Satz 3.9.1 *Es gibt genau ein* $\xi \in [0,2]$ *mit* $\cos(\xi) = 0$.

Definition 3.9.2 $\pi := 2\xi$.

Auch Teile dieses Beweises wurden in das nächste Kapitel verschoben. Es wurde gezeigt, dass $\sin(x) > 0$ ist für $x \in (0,2]$. Aus $\cos'(x) = -\sin(x)$ folgt, wie wir mit den Resultaten des nächsten Kapitels einsehen werden, dass $\cos(x)$ auf $[0,2]$ streng monoton fällt.

Folgerung 3.9.3 $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$

Aus den Additionstheoremen folgern wir nun

Satz 3.9.4 *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{array}{ll} 1) & \cos(x+2\pi) = \cos(x), \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x), \\ 2) & \cos(x+\pi) = -\cos(x), \quad \sin(x+\pi) = -\sin(x), \\ 3) & \cos(x+\dfrac{\pi}{2}) = -\sin(x), \quad \sin(x+\dfrac{\pi}{2}) = \cos(x). \end{array}$$

Ferner hat man die folgende Wertetabelle.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

3.10 Umkehrung der trigonometrischen Funktionen

cos ist auf $[0,\pi]$ streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion

$$\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

heißt Arcus-Cosinus.

sin ist auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

heißt Arcus-Sinus.
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ setzt man

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

tan ist auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und bildet $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

heißt Arcus-Tangens.

Bemerkung 3.10.1 Es gilt $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Protokoll über die 17. Vorlesung (Dustin Lazarovici)

4 Differenzierbare Abbildungen

4.1 Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden sei I ein nicht-leeres, offenes Intervall in $\mathbb{R}$ (z.B. $I = \mathbb{R}$). Wie bisher steht K für den Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 4.1.1 Sei $f\colon I \longrightarrow K$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x_0 , falls es ein $m \in K$ gibt, so daß

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x - x_0), \tag{1}$$

wobei $r : I - x_0 \to K$ die Eigenschaft

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{2}$$

hat.

Satz 4.1.2 *Sei $f\colon I \longrightarrow K$ und $x_0 \in I$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn der Differentialquotient*

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. In diesem Fall ist $f'(x_0)$ gleich dem m in obiger Definition.

Folgerung 4.1.3 *Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist das m in obiger Definition eindeutig bestimmt.*

Interpretation der Ableitung

(1) Lokale Linerarisierung (affin lineare Abb. + Fehlerterm, der ,,schneller als linear" gg. 0 geht)

(2) Steigung der Tangente (Differenzenquotient → Differentialquotient)

(3) Physikalisch (,,Mittlere Geschwindigkeit" → Momentan-Geschwindigkeit)

Satz 4.1.4 *Wenn f in x_0 differenzierbar ist, so ist f in x_0 stetig.*

Man beachte, daß die Umkehrung falsch ist. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die Betragsfunktion.

Definition 4.1.5 a) Ist f differenzierbar in x_0, dann heißt $f'(x_0)$ die Ableitung oder das Differential von f an der Stelle x_0. Statt $f'(x_0)$ schreibt man auch $\frac{d}{dx}f(x_0)$ oder $Df(x_0)$.

b) f heißt differenzierbar, wenn sie auf dem ganzen Definitionsbereich I differenzierbar ist.
Die Zuordnung $f : I \to K$, $x \mapsto f'(x)$ definiert dann eine Abbildung auf I, genannt die Ableitung von f.

c) f heißt stetig differenzierbar (an der Stelle x_0), wenn f differenzierbar und f' (an der Stelle x_0) stetig ist.

d) f heißt k-mal (stetig) differenzierbar, wenn die Abbildungen $f, f', f'' = f^2, \ldots, f^{k-1}$ alle differenzierbar sind (und f^k stetig ist). Man nennt $f^k = (f^{k-1})'$ die k-te Ableitung von f.

Definition 4.1.6 Wir definieren die Funktionenräume
$C(I;K) := \{f : I \to K \mid f \text{ stetig}\}$
$C^k(I;K) := \{f : I \to K \mid f \text{ k mal stetig differenzierbar}\},\ k \in \mathbb{N}.$

Klar ist $C \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots C^{k-1} \supset C^k \supset \dots$. Wir definieren ferner

$C^\infty(I;K) := \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(I;K)$

Abschließend definieren wir einseitige Ableitungen.

Definition 4.1.7 a) f heißt linksseitig differenzierbar in x_0, falls der Limes

$$f'_-(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert.
b) f heißt rechtsseitig differenzierbar in x_0, falls der Limes

$$f'_+(x_0) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert.

Die einseitigen Ableitungen f bzw. f'_- sind auch an den Rändern kompakter Intervalle sinnvoll.

4.2 Differentiationsregeln

Satz 4.2.1 *Seien $f : I_1 \to K$, $g : I_2 \to K$ differenzierbar in $x_0 \in I_1 \cap I_2$ und $\lambda \in K$. Dann sind auch die Funktionen $f+g$, λf, $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

iii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ *(Produktregel)*

Ist ferner $g \neq 0$ in einer Umgebung von x_0, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar mit

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ *(Quotientenregel)*

Satz 4.2.2 *(Kettenregel) Seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I_1 \longrightarrow I_2, g : I_2 \longrightarrow K$. Die Funktion f sei in $x_0 \in I_1$ differenzierbar und g sei in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch das Kompositum $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Protokoll über die 18. Vorlesung

Satz 4.2.3 *(Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und streng monotone Funktion. Sei $I^* := f(I)$ und $g : I^* \longrightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

4.3 Extremalstellen

Definition 4.3.1 Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem metrischen Raum X.
a) f hat ein lokales Maximum bei $p \in X$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(p) \geq f(x)$ gilt für alle $x \in U_\delta(p)$.
b) f hat ein lokales Minimum bei $p \in X$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(p) \leq f(x)$ gilt für alle $x \in U_\delta(p)$.
c) Wir nennen das Maximum isoliert, falls in der Ungleichung $>$ gilt. Analog definiert man ein isoliertes Minimum.
d) f hat ein globales Maximum bei $p \in X$, falls $f(p) \geq f(x)$ gilt für alle $x \in X$.
e) f hat ein globales Minimum bei $p \in X$, falls $f(p) \leq f(x)$ gilt für alle $x \in X$.

Satz 4.3.2 *Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und f habe bei $x_0 \in (a, b)$ einen lokalen Extremwert (d.h. ein lokales Maximum oder Minimum) und f sei in x_0 differzierbar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Man beachte, daß dies nur eine notwendige, aber keine hineichende Bedingung ist. Als Gegenbeispiel sei die Funktion $x \mapsto x^3$ angeführt.

4.4 Mittelwertsätze

Satz 4.4.1 *(Satz von Rolle) Sei $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Satz 4.4.2 *(Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Sei $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Folgerung 4.4.3 *(Mittelwertsatz) Sei $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerung 4.4.4 *Sei $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Für die Ableitung gelte*

$$m \leq f'(\xi) \leq M, \quad \forall \xi \in (a, b),$$

mit $m, M \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \leq y$ die Abschätzung

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

Folgerung 4.4.5 *Sei f wie eben und es gelte zusätzlich $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konstant.*

4.5 Monotonie

Satz 4.5.1 *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:*

(a) $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \implies f$ *ist streng monoton wachsend.*

(b) $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \implies f$ *ist streng monoton fallend.*

(c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b) \iff f$ *ist monoton wachsend.*

(d) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b) \iff f$ *ist monoton fallend.*

Satz 4.5.2 *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, in $x \in (a,b)$ zweimal differenzierbar und es gelte*

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \text{ (bzw. } f''(x) < 0).$$

Dann hat f in x ein isoliertes Minimum (bzw. Maximum).

Man beachte, dass die Bedingung des Satzes zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

4.6 Konvexität

Definition 4.6.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Man nennt f konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Bemerkung 4.6.2 Fordert man in der Definition strikte Ungleichheit, so nennt man f streng konvex.

Satz 4.6.3 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.*

Bemerkung 4.6.4 In obiger Situation gilt auch:

$$f''(x) > 0, \forall x \in I \implies f \text{ ist streng konvex.}$$

Protokoll über die 19. und 20. Vorlesung

4.7 Satz von Darboux

Satz 4.7.1 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, differenzierbar auf $[a,b]$. Dann gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (bzw. $f'(b) < \lambda < f'(a)$) ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \lambda$.*

Die Ableitung f' erfüllt also den Zwischenwertsatz ohne notwendigerweise stetig zu sein.

4.8 Die Regel von l'Hospital

Satz 4.8.1 *Sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Der rechtsseitige Limes*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiere (im eigentlichen oder uneigentliche Sinn). Weiter sei eine der folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt:

$$\begin{aligned} (H1) \qquad & \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0, \\ (H2) \qquad & \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty. \end{aligned}$$

Dann existiert auch

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analoge Resultate gelten für $x \longrightarrow b^-$.

4.9 Der Taylorsche Satz

Satz 4.9.1 *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $f^{(n-1)}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Seien $\alpha, \beta \in (a,b), \alpha \neq \beta$. Sei*

$$P(t) = P_{n-1,f,\alpha}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k.$$

Dann gibt es einen Zwischenwert ξ von α und β,

$$\xi = \alpha + \vartheta(\beta - \alpha), \quad \vartheta \in (0,1),$$

so daß

$$f(\beta) = P(\beta) + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta-\alpha)^n}_{=:R_{n,f,\alpha}(\beta)}.$$

Bemerkungen 4.9.2 1) Für $n = 1$ ist dies der Mittelwertsatz.
2) Das Polynom $P_{n-1,f,\alpha}$ nennt man das $(n-1)$-te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt α. Dies ist ein Polynom (in t) vom Grad $\leq n-1$.

Definition 4.9.3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Die Funktion sei im Punkt $a \in I$ beliebig oft differenzierbar. Dann nennt man

$$T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

die Taylorentwicklung von f im Entwicklungspunkt a.

Für ein $x \in I$ konvergiert $T_{f,a}(x)$ genau dann gegen $f(x)$, wenn $R_{m,f,a}(x)$ für $m \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Man beachte, daß die Taylorreihe im Allgemeinen nicht für alle $x \in I$ konvergiert. Selbst im Falle der Konvergenz, gilt im Allgemeinen nicht $f(x) = T_{f,a}(x)$.

Satz 4.9.4 *Für $|x| < 1$ gilt*

$$\log(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k}.$$

Auf die selbe Weise wie im Beweis zu diesem Satz kann man Taylorentwicklungen für arctan, arcsin und arccos herleiten.

5 Funktionenfolgen

5.1 Grundlegende Definitionen

Definition 5.1.1 Seien $f_n : X \longrightarrow Y$ Funktionen zwischen metrischen Räumen X und Y.
1) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent in $x \in X$, falls die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir nennen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergent, wenn für alle $x \in X$ punktweise Konvergenz vorliegt.
2) Im Falle punktweiser Konvergenz heißt

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

die Grenzfunktion von (f_n).
3) Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent gegen f, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natüriche Zahl $N = N(\epsilon)$ gibt, so daß für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$ gilt: $d_Y(f(x), f_n(x)) < \epsilon$.

Wir schreiben $f_n \longrightarrow f$ bei punktweiser Konvergenz, und $f_n \implies f$ bei gleichmäßiger Konvergenz. Einen wichtigen Spezialfall von Funktionenfolgen stellen die unendlichen Reihen über Funktionen dar. Sei $g_k : X \longrightarrow K$ und

$$f_n := \sum_{k=0}^{n} g_k.$$

Wie bei Reihen üblich schreibt man auch hier $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ und meint damit die Folge der Partialsummen. Dieser Spezialfall umfaßt insbesondere die Potenzreihen.

Definition 5.1.2 Für eine Funktion $f : X \longrightarrow K$ erklärt man die Supremumsnorm durch

$$||f|| = ||f||_X := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Diese Norm erfüllt die Dreiecksungleichung, $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Satz 5.1.3 *Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $||f_n - f||$ gegen 0 konvergiert.*

Satz 5.1.4 *(Weiserstraß) Gegeben seien die Funktionen $g_k : X \longrightarrow K$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} ||g_k||$ sei konvergent. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ absolut und gleichmäßig auf X.*

Für spätere Anwendungen in der Theorie der Potenzreihen ist das nächste Resultat grundlegend.

Folgerung 5.1.5 *Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in K$, eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $P(x)$ absolut und gleichmäßig konvergent auf jeder Teilmenge der Form*

$$\{x \in K \mid |x| \leq \rho\}, \quad 0 < \rho < r.$$

5.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

Die folgenden Resultate geben Auskunft darüber, unter welchen Voraussetzungen sich Eigenschaften der f_n, wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, auf die Grenzfunktion f vererben.

Satz 5.2.1 *Die Funktionen $f_n : X \longrightarrow Y$ seien stetig und (f_n) sei gleichmäßig konvergent gegen f. Dann ist auch f stetig.*

Folgerung 5.2.2 *Potenzreihen stellen im Inneren ihres Konvergezbereichs stetige Funktionen dar.*

Protokoll über die 21. bis zur letzten Vorlesung

Satz 5.2.3 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und die Funktionen $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf I. Für ein $x_0 \in I$ existiere $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Auf jedem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall von I sei (f_n') gleichmäßig konvergent. Dann ist auch (f_n) auf jedem abgeschlossenen und beschränkten Teilintervall gleichmäßig konvergent, die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ist differenzierbar und*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Folgerung 5.2.4 *Potenzreihen $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sind im Inneren ihres Konvergezbereichs differenzierbar und es gilt*

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

6 Das Riemann-Integral

6.1 Grundlegende Definitionen

Definition 6.1.1 Unter einer Partition P des Intervalls $[a, b]$ versteht man eine endliche Menge von Punkten $x_0, \ldots, x_n$ mit

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Wir schreiben $\Delta_i := x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$.
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und P eine Partition von $[a, b]$. Wir setzen

$$\begin{aligned} M_i &:= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ m_i &:= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ S(P, f) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i, \\ s(P, f) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\overline{\int_a^b} f\,dx := \inf S(P,f),$$
$$\underline{\int_a^b} f\,dx := \sup s(P,f).$$

Man spricht hier vom oberen und unteren Riemann-Integral. Das Infimum bzw. Supremum ist hier über alle Partitionen von $[a,b]$ zu nehmen.

Definition 6.1.2 f heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx.$$

Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R} = \mathcal{R}(a,b)$.
Das wesentliche technische Hilfsmittel in vielen Beweisen zu Resultaten rund um das Riemann-Integral ist der Begriff der Verfeinerung einer Partition.

Definition 6.1.3 P^* ist eine Verfeinerung von P, falls $P \subseteq P^*$.

Zu zwei gegebenen Verfeinerungen gibt es stets gemeinsame Verfeinerungen, etwa $P^* = P_1 \cup P_2$.

Satz 6.1.4 *Es gilt stets* $\underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx$.

Der nun folgende Satz enthält eine wichtige Charakterisierung der Integrierbarkeit.

Satz 6.1.5

$$f \in \mathcal{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists P : S(P,f) - s(P,f) < \epsilon.$$

Folgerung 6.1.6
a) Falls $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$ für eine Partition P gilt, so gilt auch $S(P^*,f) - s(P^*,f) < \epsilon$ für jede Verfeinerung P^* von P.
b) Es gelte wieder $S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$ für die Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Seien $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Dann gilt auch

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)|\Delta_i < \epsilon.$$

c) Sei $f \in \mathcal{R}$ und es gelten die Voraussetzungen aus b). Dann gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta_i - \int_a^b f\,dx \right| < \epsilon.$$

In den folgenden Sätzen wird die Riemann-Integrierbarkeit für verschiedene Klassen von Funktionen f gezeigt.

Satz 6.1.7 *Sei f stetig auf $[a,b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}(a,b)$.*

Satz 6.1.8 *Sei f monoton auf $[a,b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}(a,b)$.*

Satz 6.1.9 *Die beschränkte Funktion f habe auf $[a,b]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen. Dann ist $f \in \mathcal{R}(a,b)$.*

Satz 6.1.10 *Sei $f \in \mathcal{R}$, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$. Sei $\Phi : [m,M] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\Phi \circ f \in \mathcal{R}$.*

6.2 Eigenschaften des Integrals

Satz 6.2.1 *a) (Linearität) Sind $f, f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}$ und $cf \in \mathcal{R}$. Es gilt*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)dx = \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx,$$
$$\int_a^b cf dx = c\int_a^b f dx.$$

b) (Monotonie) Gilt $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f_1 dx \leq \int_a^b f_2 dx.$$

c) Für $f \in \mathcal{R}$ und $a < c < b$ gilt

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

d) Ist $f \in \mathcal{R}$ und $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$, so gilt

$$\left|\int_a^b f dx\right| \leq M(b - a).$$

Satz 6.2.2 *Für $f, g \in \mathcal{R}$ gilt:*
a) $fg \in \mathcal{R}$.
b) $|f| \in \mathcal{R}$.
Ferner gilt: $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| dx$.