UNIVERSITÄT KASSEL

Analysis I

Klausur WS 09/10

Gruppe A

18. Februar 2010 Prof. Dr. W. Bley

1a-e	1f	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6	7a	7b	$\sum$

Name: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

Studienleistungen erbracht im WS ... bei Prof. ....

Alte Studienordnung: ☐
Neue Studienordnung: ☐

Aufgabe 1 **(Punkte)**

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (Punkte)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)^3+1}$, (Punkte)

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, $x \in \mathbb{R}$, (Punkte)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, (Punkte)

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. (Punkte)

(f) Sind die durch (c), (d), (e) im jeweiligen Konvergenzbereich definierten Funktionen stetig? (Punkte)

- zu (c)

5 / 8

Aufgabe 2 (**Punkte**)

Man berechne das 3. TAYLORpolynom der Funktion $f(x) = e^x \sin x$ in $a = 0$, ~~gebe das 3. Restglied von f in der LAGRANGEschen Fassung an~~ und berechne damit $e \sin(1)$ bis auf einen Fehler kleiner als $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3 **(Punkte)**

Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$, (Punkte)

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$. (Punkte)

Aufgabe 4 **(Punkte)**

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

(a) (x_n) ist konvergent. (Punkte)

(b) Für den Grenzwert x^* gilt $|x^* - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. (Punkte)

- zu (a)

Aufgabe 5

(Punkte)

Sei $I = [a, b]$, $a < b$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig und für alle $x \in I$ gelte $f(x) \geq x$.
Man zeige:

(a) Jede Folge (x_n) in I, die der Bedingung $x_{n+1} \geq f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt, ist konvergent, und

(b) der Grenzwert $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ ist Fixpunkt von f, das heißt $f(x_0) = x_0$.

- zu (a)

Aufgabe 6 **(Punkte)**

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$, $a < b, a, b \in \mathbb{R}$. Man zeige die Existenz einer Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$ mit $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$.

Aufgabe 7 **(Punkte)**

Es seien f und g stetige Abbildungen eines metrischen Raumes X in einen metrischen Raum Y, und E sei eine dichte Teilmenge von X.

(a) Man beweise, dass $f(E)$ dicht in $f(X)$ ist. (Punkte)

(b) Gilt $g(p) = f(p)$ für alle $p \in E$, so beweise man, dass $g(p) = f(p)$ für alle $p \in X$ gilt. (In anderen Worten: Eine stetige Abbildung ist durch ihre Werte auf einer dichten Teilmenge des Definitionsbereichs bestimmt.) (Punkte)

- zu (a)