LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. W. Bley
Dustin Lazarovici
Daniel Bembé

Sommersemester 2011
Nachklausur
14. Oktober 2011

Analysis I

Klausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❑ PO 2010 ❑ PO 2011 Lehramt Gymnasium ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Master ❑ Diplom ❑ ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösungen zu verschiedenen Aufgaben bitte auf **verschiedene Blätter** schreiben.

Zugelassene Hilfsmittel: Schreibzeug, Lineal oder Geodreieck.

Bearbeitungszeit: **120 Minuten**.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	6	$\sum$
	/08	/12	/06	/06	/08	/06	/46

Name: ____________________

Aufgabe 1. [3 + 5 = 8 Punkte]

Sei $p > 1$ eine natürliche Zahl. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

$$a_0 := p, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{p}{2a_n}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq \sqrt{p}$.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Name: ______________________________

Zu Aufgabe 1:

Name: ____

Aufgabe 2. [4 + 4 + 4 = 12 Punkte]

a) Ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

konvergent?

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, gilt:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitungen.

c) Zeigen Sie, dass die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$$

den Konvergenzradius $R = 1$ hat.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe b).

Name: ____________________

Zu Aufgabe 2:

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [6 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und konstant ist.

Name: ______________________________

Zu Aufgabe 3:

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [6 Punkte]

Betrachten Sie die folgenden Teilemngen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq x_2\}, \\
B &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1\}, \\
C &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \leq x_2 \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Welche dieser Mengen sind kompakt? Begründen Sie Ihre Antworten!

Name: ____________________

Zu Aufgabe 4:

Name: ____________________

Aufgabe 5. [8 Punkte]

Man berechne das dritte Taylorpolynom von

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

im Entwicklungspunkt $a = 0$ und bestimme damit eine rationale Zahl r mit

$$|e\cos(1) - r| \leq \frac{1}{2}.$$

Begründen Sie die Fehlerabschätzung.

Name: ____________________

Zu Aufgabe 5:

Name: ______________________________

Aufgabe 6. [2 + 4 = 6 Punkte]

a) Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

b) Es sei nun $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, *stetige* Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 f(x)\,dx > 0.$$

Name: ______________________________

Zu Aufgabe 6: