LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. W. Bley
Dustin Lazarovici
Daniel Bembé

Sommersemester 2011
Abschlussklausur
28. Juli 2011

Analysis I

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ______________________ Fachsemester: ______________________

Abschluss: Bachelor ❏ PO 2010 ❏ PO 2011 Lehramt Gymnasium ❏ modularisiert ❏ nicht modularisiert

❏ Master ❏ Diplom ❏ ______________________

Hauptfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Nebenfach: ❏ Mathematik ❏ Wirtschaftsm. ❏ Inf. ❏ Phys. ❏ Stat. ❏ ________

Anrechnung der Credit Points für das ❏ Hauptfach ❏ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösungen zu verschiedenen Aufgaben bitte auf **verschiedene Blätter** schreiben.

Zugelassene Hilfsmittel: Schreibzeug, Lineal oder Geodreieck.

Bearbeitungszeit: **120 Minuten**.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	$\sum$
	/10	/12	/08	/06	/10	/46

Name: ____________________

Aufgabe 1. [4 + 6 = 10 Punkte]

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{100}$.

b) Sei $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z) \geq 0,\ |z| \leq 2\} \subset \mathbb{C}$.
Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene:

i) Die Menge A.

ii) Das komplex konjugierte der Menge A, also $\overline{A} := \{\overline{z} \mid z \in A\}$.

iii) Die Menge $A^2 := \{z^2 \mid z \in A\}$.

Bitte begründen Sie alle Ihre Antworten.

Name: ____

Aufgabe 2. [4 + 4 + 4 = 12 Punkte]

a) Bestimmen Sie, ob folgende Reihe (absolut) konvergent oder divergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-n+5}$$

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, und $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiere. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktionenfolge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

auf Konvergenz. Ist die Grenzfunktion stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: ______________________________

Zu Aufgabe 2:

Name: ______________________________

Aufgabe 3. [6 + 2 = 8 Punkte]

a) Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Untersuchen Sie, wo die Abbildung

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{c/x}$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

b) Entscheiden Sie mit Beweis welche der beiden Zahlen $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ größer ist.

Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe a).

Name: ____

Zu Aufgabe 3:

Name: ____________________

Aufgabe 4. [6 Punkte]

Sei $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $z \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass dann $z_n \in \mathcal{H}$ gilt für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Name: ____

Aufgabe 5. [10 Punkte]

Seien X, Y metrische Räume und Y vollständig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X und $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Hinweis: Drücken Sie die gegebenen Voraussetzungen formal aus. Achten sie darauf, die Metriken auf X und Y voneinander zu unterscheiden.