Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Sei K ein p-adischer Zahlkörper mit normierter Bewertung v und $a \in K^\times$. Sei α eine Nullstelle von $x^m - a$ und es gelte $(v(a), m) = 1$. Zeige: $K(\alpha)/K$ ist voll verzweigt vom Grad m.

Aufgabe 2
Für einen p-adischen Zahlkörper sei K^{nr} das Kompositum aller endlichen unverzweigten Erweiterungen von K (in einem festen algebraischen Abschluss von K). Dann nennt man K^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von K.

a) Zeige: Die maximal unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ entsteht durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von zu p teilerfremder Ordnung.

b) Zeige: $K^{nr} = K\mathbb{Q}_p^{nr}$.

Aufgabe 3
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung von p-adischen Zahlkörpern mit Gruppe G. Für $s \geq -1$ sei

$$G_s = G_s(L/K) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}_L^{s+1}} \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{O}_L\}.$$

Zeige:

a) G_{s+1} ist ein Normalteiler in G.

b) $G_s = 1$ für $s >> 0$.

Aufgabe 4
Sei L/K eine zyklische Körpererweiterung und $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$. Sei $\alpha \in L^\times$. Dann gilt:

$$N_{L/K}(\alpha) = 1 \iff \text{es gibt } \beta \in L^\times \text{ mit } \alpha = \frac{\sigma(\beta)}{\beta}.$$

Hinweis: Das ist Hilberts Satz 90.