Prof. Dr. Werner Bley

Wintersemester 2022/23

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Sei $|\ |_p$ der p-adische Betrag auf $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_p^c$ ein algebraischer Abschluss. Wir bezeichnen mit $|\ |_p$ ebenfalls seine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf $\mathbb{Q}_p^c$. Berechne $|\sqrt[m]{p}|_p$, $|\zeta_{p^n}|_p$ sowie $|1-\zeta_{p^n}|_p$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und eine primitive p^n-te Einheitswurzel ζ_{p^n}.

Aufgabe 2
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 = 2$ und sei $\mathfrak{p}$ das Primideal über der 3. Bestimmen Sie ein Primelement π für $\mathfrak{p}$, sowie ein Vertretersystem R von $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$, und berechnen Sie die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung von $1/3$.

Aufgabe 3
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathfrak{p} = 3\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass $\mu_8 \subset {}_{K_\mathfrak{p}}$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung $\mathfrak{p}$-adischen Entwicklung der Elemente von μ_8 an.

Aufgabe 4
Bestimme die abgeschlossenen Untergruppen von $\mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 5
Sei p eine ungerade Primzahl.

(a) Zeige, dass man jedes $\alpha \in \mathbb{Q}_p^\times$ eindeutig in der Form $\alpha = p^m \eta u$ mit $m \in \mathbb{Z}, \eta \in \mu_{p-1}$ und $u \in (1 + p\mathbb{Z}_p)$ schreiben kann. Hierbei bezeichnet μ_{p-1} die Gruppe der Einheitswurzel der Ordnung $p-1$.

(b) Zeige: $(1 + p\mathbb{Z}_p)^2 = 1 + p\mathbb{Z}_p$.

(c) Bestimmen Sie die sämtlichen quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$.