Prof. Dr. Werner Bley

Wintersemester 2022/23

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Berechnen Sie die ersten 3 Koeffizienten in der 5-adischen Entwicklung von $1/3$.

Aufgabe 2
Sei n eine zur Primzahl p teilerfremde natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge

$$\{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0 \text{ und } a \equiv 1 \pmod{n}\}$$

dicht in $\mathbb{Z}_p$ ist.

Aufgabe 3
Seien $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen, $R = \mathbb{F}_p[T]$ und $K = \mathbb{F}_p(T)$ der Quotientenkörper.

a) Definieren Sie zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von R, $\mathfrak{p} \neq (0)$, eine $\mathfrak{p}$-adische Bewertung. Beschreiben Sie den Zusammenhang zur Null- bzw. Polstellenordung bei $T = \alpha$, falls $\mathfrak{p} = (T - \alpha)$.

b) Zeigen Sie: Durch $v_\infty(\frac{f(T)}{g(T)}) = \deg(g(T)) - \deg(f(T))$ wird ebenfalls eine Bewertung auf K definiert. Interpretieren Sie dies als Null- bzw. Polstellenordnung in einem unendlich fernen Punkt ∞.

c) Seien $\mathfrak{p} = (p(T))$ mit irreduziblem $p(T)$, $F_\mathfrak{p}$ die durch $p(T)$ definierte Körperweiterung und $f_\mathfrak{p} = [F_\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$. Definiere

$$|h(T)|_\mathfrak{p} := q^{-f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(h(T))} \text{ für } h(T) \in K \text{ und } |h(T)|_\infty := q^{-v_\infty(h(T))}, \text{ mit } q \in \mathbb{R}_{>1}\,.$$

Zeigen Sie die Geschlossenheitsrelation, i.e. für jedes $h(T) \in K^\times$ gilt:

$$|h(T)|_\infty \cdot \prod_{\mathfrak{p} \neq (0)} |h(T)|_\mathfrak{p} = 1.$$

Aufgabe 4
Für eine natürliche Zahl n bezeichne μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}_p$. Sei nun p eine ungerade Primzahl. Zeige:

$$\mu_n \subseteq \mathbb{Z}_p \iff p \equiv 1 \pmod{n}.$$