



Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in \mathbb{Z}_7 eine Lösung hat.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots$ konvergiert für keine Primzahl p in \mathbb{Q}_p .

Aufgabe 3

Sei K/\mathbb{Q} ein Zahlkörper und $\alpha \in K^\times$. Sei \mathcal{P} die Menge der Primideale $\neq 0$ von \mathcal{O}_K und $\mathcal{P}_\infty := \{\rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ die Menge der reellen Einbettungen und "der Hälfte der komplexen Einbettungen". Für eine reelle Einbettung ρ definieren wir $|\alpha|_\rho := |\rho(\alpha)|_{\mathbb{R}}$, wobei $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ den gewöhnlichen Betrag auf \mathbb{R} bezeichnet. Für eine komplexe Einbettung σ definieren wir $|\alpha|_\sigma := |\sigma(\alpha)|_{\mathbb{C}}^2$, wobei $|\cdot|_{\mathbb{C}}$ den gewöhnlichen Betrag auf \mathbb{C} bezeichnet. Man zeige:

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_\infty} |\alpha|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Aufgabe 4

Sei $a = (a_n)_{n=1}^\infty \in \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

a) Zeige: $p^m a = p^m (a_n)_{n=1}^\infty = (\dots, p^m a_2 \bmod p^{p+2}, p^m a_1 \bmod p^{m+1}, 0, \dots, 0)$.

b) Zeige: $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei.