Prof. Dr. Werner Bley

Wintersemester 2022/23

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Sei K ein Zahlkörper.

Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K, \mathfrak{a} \neq (0)$, definieren wir $N(\mathfrak{a}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$. Zeigen Sie:

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $p\mathbb{Z} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Dann ist $N(\mathfrak{p})$ eine p-Potenz.
Hinweis: $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ wird zu einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

b) $N(\mathfrak{p}^n) = N(\mathfrak{p})^n$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

c) $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathcal{O}_K$.
Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathcal{O}_K$ und wenden Sie den Ch. Restsatz an.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie mittels Polynomzerlegungsgsetz nochmals die Zerlegung von $2\mathcal{O}_K$ im quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\omega)$ mit $\omega^3 = 2$. Zeigen Sie mit dem Polynomzerlegungsgesetz, dass 2 und 3 voll verzweigt sind. Bestimmen Sie die ebenfalls die Zerlegungen von und $5\mathcal{O}_K$ und $7\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 3

Seien A ein Dedekindring und M, N zwei A-Moduln. Für ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ sei $S_\mathfrak{p} = A \setminus \mathfrak{p}$. Zeige:

$$S_\mathfrak{p}^{-1}M \subseteq S_\mathfrak{p}^{-1}N \text{ für alle } \mathfrak{p} \iff M \subseteq N.$$

Aufgabe 4

Sei L/K eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale in $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass dann gilt

a) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_K$.

b) $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a}\mathcal{O}_L \mid \mathfrak{b}\mathcal{O}_L$.