Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und $(0) \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathcal{O}$. Sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \prod \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}, \quad \nu_\mathfrak{p} \in \mathbb{N}_0, \text{ fast alle } \nu_\mathfrak{p} = 0, \\ \mathfrak{b} &= \prod \mathfrak{p}^{\mu_\mathfrak{p}}, \quad \mu_\mathfrak{p} \in \mathbb{N}_0, \text{ fast alle } \mu_\mathfrak{p} = 0. \end{aligned}$$

Hierbei erstreckt sich das Produkt jeweils über alle Primideale $\neq (0)$ von $\mathcal{O}$.

Zeigen Sie:

a) $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \iff \nu_\mathfrak{p} \leq \mu_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$,

b) $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{\min(\nu_\mathfrak{p}, \mu_\mathfrak{p})}$,

c) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{\max(\nu_\mathfrak{p}, \mu_\mathfrak{p})}$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ und $\alpha \in K^\times$ defineren wir

$$v_\mathfrak{p}(\alpha) := v_\mathfrak{p}(\alpha\mathcal{O}).$$

Zeige:

a) $v_\mathfrak{p}(\alpha\beta) = v_\mathfrak{p}(\alpha) + v_\mathfrak{p}(\beta)$.

b) $v_\mathfrak{p}(\alpha + \beta) \geq \min(v_\mathfrak{p}(\alpha), v_\mathfrak{p}(\beta))$, mit Gleichheit, falls $v_\mathfrak{p}(\alpha) \neq v_\mathfrak{p}(\beta)$.

Aufgabe 3
Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Benutze ohne Beweis $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ und zeige:

a) Falls $m = p^r$ eine Primzahlpotenz ist, so ist $\mathfrak{p} := (1 - \zeta_m)\mathcal{O}_K$ ein Primideal und es gilt:

$$\mathfrak{p}^{p^{r-1}(p-1)} = p\mathcal{O}_K.$$

b) Falls m zusammengesetzt ist, so ist $1 - \zeta_m$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$.

c) Für alle m und alle $1 \leq a \leq m$ mit $(m, a) = 1$ ist $\frac{1-\zeta_m^a}{1-\zeta_m}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 4
Sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_\mathcal{O}$ gebrochene Ideale. Sei S eine multiplikative Menge in $\mathcal{O}$. Zeige:

a) $S^{-1}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}\mathfrak{b})$.

b) $S^{-1}(\mathcal{O} : \mathfrak{a}) = (S^{-1}\mathcal{O}, S^{-1}\mathfrak{a})$.

c) Sei nun $S = \mathcal{O} \setminus \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$. Zeige für alle $i \geq 0$ und $\alpha \in \mathfrak{p}^i \setminus \mathfrak{p}^{i+1}$ die Gleichheit $S^{-1}\mathfrak{p}^i = \alpha S^{-1}\mathcal{O}$. ($S^{-1}\mathcal{O}$ ist also ein diskreter Bewertungsring.)