Prof. Dr. Werner Bley

Wintersemester 2022/23

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1
Sei $L/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad n. Zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ sei

$$d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \det\left(\left(\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\alpha_i \alpha_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right)$$

die Diskriminante des Tupels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

a) Zeige: $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle_{\mathbb{Z}} \implies d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = d(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Man kann also in natürlicher Weise die Diskriminante eines $\mathbb{Z}$-Moduls $M \subseteq L$ vom Rang n definieren.

b) Zeige: $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \iff \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist $\mathbb{Q}$-Basis von L.

c) Seien $M \subseteq N$ zwei $\mathbb{Z}$-Teilmoduln vom Rang n in L. Zeige: $d(M) = [N : M]^2 d(N)$.

d) Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Berechne $d(\mathbb{Z}[\zeta_{p^n}])$.

Aufgabe 2
Studieren Sie Lang, Seite 17 unten bis zum Ende von §5.

Sei dann $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ und p eine Primzahl mit $p \nmid n$. Sei $\sigma_p = (p\mathbb{Z}, L/\mathbb{Q})$ der Artinautomorphismus. Zeige:

(a) σ_p ist gegeben $\zeta_n \mapsto \zeta_n^p$.

(b) p ist voll zerlegt $\iff p \equiv 1 \pmod{n}$.

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers.