Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei A ganz abgeschlossen in $K = \mathrm{Quot}(A)$. Sei L/K eine Körpererweiterung ($[L : K] = \infty$ ist erlaubt) und sei $\bar{K}$ der algebraische Abschluss von K in L. Sei B der ganze Abschluss von A in L. Zeige:

(a) $\bar{K} = \mathrm{Quot}(B)$.

(b) B ist ganz abgeschlossen in L.

Aufgabe 2
Sei A ganz abgeschlossen in $K = \mathrm{Quot}(A)$. Sei L/K eine Körpererweiterung ($[L : K] = \infty$ ist erlaubt). Sei B der ganze Abschluss von A in L. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Menge. Zeige: $S^{-1}B$ ist der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in L.

Aufgabe 3
Sei p eine Primzahl und $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Wir werden später zeigen, dass $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\zeta_p]$ gilt. Zeige, dass es in $L/\mathbb{Q}$ genau ein Primidel $\mathfrak{P}$ über $p\mathbb{Z}$ gibt, nämlich $\mathfrak{P} = (1 - \zeta_p)\mathcal{O}_L$.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Ganzheitsbasis für $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.