



Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Sei $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass die Einheiten von \mathcal{O}_K , $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, eineindeutig zu den Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von $x^2 - dy^2 = \pm 4$ korrespondieren.

Aufgabe 2

Seien $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$ die Einbettungen von K nach \mathbb{C} . Wir teilen diese auf in die reellen ρ_1, \dots, ρ_r und die Paare der komplexen, $\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_s, \bar{\sigma}_s$. In der Vorlesung haben wir die Abbildung

$$\ell : K_{\mathbb{R}}^{\times} \rightarrow \mathbb{R}^{r+s}$$
$$(x_{\tau})_{\tau} \mapsto (\log |x_{\rho_1}|, \dots, \log |x_{\rho_r}|, 2 \log |x_{\sigma_1}|, \dots, 2 \log |x_{\sigma_s}|)$$

und die Mengen

$$S = \{y \in K_{\mathbb{R}}^{\times} : N(y) = \pm 1\},$$
$$H = \{x \in \mathbb{R}^{r+s} : \text{Tr}(x) = 0\},$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\ell(S) = H$ gilt.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante

$$5, 8, 12, 13, -3, -4, -7, -8, -11$$

die Klassenzahl 1 haben.

b) Berechnen Sie die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$.

Hinweise finden Sie auch in 'Algebraic Number Theory' von Fröhlich/Taylor auf Seite 167.

Aufgabe 4

Lesen Sie sich im Buch 'Algebraische Zahlentheorie' von J. Neukirch den Beweis der folgenden Aussage durch (Lemma 2.15, Kapitel III, p. 216):

Die konvexe, zentral-symmetrische Menge

$$X = \{(z_{\tau}) \in K_{\mathbb{R}} : \sum_{\tau} |z_{\tau}| \leq t\}$$

hat das Volumen $2^r \pi^s \frac{t^n}{n!}$.

Hinweis: Wenn Sie sich unter <https://login.emedien.uw.uni-muenchen.de/login> mit Ihrer Campus-Kennung einloggen, können Sie sich eine pdf-Version dieses Buchs (und vieler anderer) kostenfrei herunterladen.