Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1
Sei $n \in \mathbb{N}$ und C eine zyklische Gruppe der Ordnung n.
Zeigen Sie, dass es eine endliche galoissche Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong C$.
Hinweis: Benutzen Sie Kreiskörpertheorie und den Dirichletschen Primzahlsatz.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass der Minkowskische Gitterpunktsatz nicht verbessert werden kann, indem man eine konvexe, zentralsymmetrische Menge $X \subseteq V$ mit $\mathrm{Vol}(X) = 2^n \mathrm{Vol}(\Gamma)$ angibt, die keinen von 0 verschiedenen Punkt von Γ enthält.
Ist aber X kompakt, so ist das Gleichheitszeichen zulässig.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $(1+\varepsilon)X$ für $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 3
Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal. Sie dürfen die Endlichkeit der Klassenzahl verwenden.

a) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl h gibt, so dass $\mathfrak{a}^h = a\mathcal{O}_K$ ein Hauptideal ist.
b) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ im Körper $L = K(\sqrt[h]{a})$ ein Hauptideal wird, d.h. $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L = \alpha\mathcal{O}_L$.
c) Zeigen Sie, dass es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L gibt, in der jedes Ideal von K ein Hauptideal wird.

Aufgabe 4
Sei p eine ungerade Primzahl und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, wobei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel bezeichnet. Sei μ_K die Gruppe der Einheitswurzeln in K.

a) Bestimmen Sie μ_K.
b) Sei K^+ der maximal reelle Teilkörper von K und sei $\langle\tau\rangle = \mathrm{Gal}(K/K^+)$ (τ ist also die komplexe Konjugation).
Zeigen Sie: $K^+ = K^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.
c) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} f : \mathcal{O}_K^\times &\to \mu_K/\mu_K^2, \\ u &\mapsto \frac{u}{\tau(u)} \cdot \mu_K^2 \end{aligned}$$
ein Gruppenhomomorphismus ist mit $\ker(f) = \mu_K \mathcal{O}_{K^+}^\times$.
Hinweis: Es gilt $|\sigma(\frac{u}{\tau(u)})^j| = 1$ für alle Einbettungen σ und alle j.
d) Zeigen Sie: $[\mathcal{O}_K^\times : \mu_K \mathcal{O}_{K^+}^\times] \leq 2$.