Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Sei K ein algebraischer Zahlkörper von Grad n über $\mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathcal{O}_K$.
Zeigen Sie, dass

$$d(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = d(1, (\alpha + m), \ldots, (\alpha + m)^{n-1})$$

gilt.

Aufgabe 2
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine ganze algebraische Zahl und $f(x)$ das Minimalpolynom von α. Falls f Grad n hat, zeigen Sie dass,

$$d_K(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(\sigma_i(\alpha)).$$

Aufgabe 3
Sei K ein algebraischer Zahlkörper von Grad n über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$d_K \equiv 0, 1 \bmod 4.$$

Man nennt diese Tatsache auch das *Stickelberger-Kriterium*

Aufgabe 4
Sei $\zeta = \zeta_{p^m}$ eine primitive p^m-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}^c$. Zeige:

(a) Die Primzahl p ist in $\mathbb{Q}(\zeta)$ voll verzweigt vom Grad $\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$.

(b) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$.

(c) $\mathbb{Z}[\zeta]$ ist der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}(\zeta)$.

(d) $1 - \zeta$ erzeugt das Primideal über p. Die Norm von $1 - \zeta$ ist p.

(e) Sei nun n beliebig und $\zeta = \zeta_n$ eine primitive n-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}^c$. Sei $K := \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Zeige $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_n]$ und berechne die Diskriminante d_K.

Aufgabe 5
Sei K vollständig bezüglich der nicht archimedischen Bewertung v. Sei E/K eine endliche separable Erweiterung.

(a) Zeige: $\mathrm{Tr}_{E/K}\colon E \longrightarrow K$ ist stetig.

(b) Seien $x, y, \xi, \eta \in E$ und $|x - \xi|$ sowie $|y - \eta|$ klein genug. Zeige:

$$\mathrm{Tr}_{E/K}(xy) \in \mathcal{O}_K \iff \mathrm{Tr}_{E/K}(\xi\eta) \in \mathcal{O}_K.$$

Präzisieren Sie die Aussage.