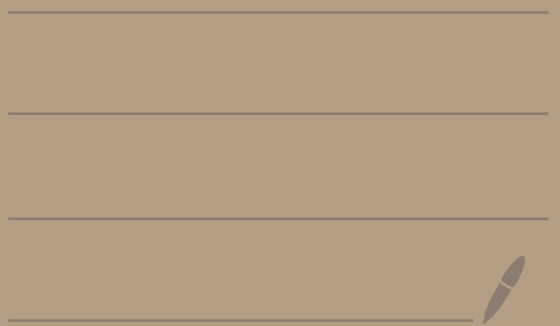


Übung 1 , 19.10.22



Aufgabe 1) Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}} \in \mathbb{C}$$

ganz über \mathbb{Z} ist.

Aufgabe 2) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei. Zeigen Sie:

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right], & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

Aufgabe 3) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ wie in 2).

a) Sei $d < 0$. Bestimmen Sie \mathcal{O}_K^\times .

b) Sei $d > 0$. Zeigen Sie: $|\mathcal{O}_K^\times| = \infty$

Hinweis: a) Sei K/\mathbb{Q} ein Zahlkorp. Zeigen Sie
zunächst für $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$:

$$\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times \iff N_{K/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = \pm 1$$

b) 3b) ist vermutlich ohne Zuhilfenahme weiterer Theorie schwer. Studieren Sie zumindest die Spezialfälle für $d = 2$ und $d = 5$.